Sobre la Ecuación

$$(1) \qquad x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$$

Por F. J. DUARTE

Individuo de Número de la Academia

1.—Se conocen las fórmulas de Euler y de Binet que dan la solución general de esta ecuación. En esta nota nos proponemos mostrar en primer lugar que la resolución de esta ecuación equivale a la representación de un entero dado por medio de una forma cuadrática binaria. En efecto, el problema de hallar las soluciones de esta ecuación se reduce a la resolución de una ecuación diofántica de segundo grado con dos variables. Después hallaremos de una manera muy simple fórmulas equivalentes a las de Euler-Binet y probaremos que ellas suministran la solución general de (1).

2.—Toda solución de la ecuación propuesta puede ponerse en la forma

$$(2) \quad \begin{cases} x_i = \propto + \rho \, a_i \\ y_i = \propto + \rho \, b_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

En efecto, suponiendo dados x_i, y_i y $\propto$ y ρ escogidos arbitrariamente ($\rho \neq 0$), los parámetros a_i, b_i tendrán valores racionales perfectamente determinados.

Sustituyendo los valores (2) en la ecuación (1) y poniendo

$$\triangle_1 = \Sigma a_i - \Sigma b_i, \quad \triangle_2 = \Sigma a_i^2 - \Sigma b_i^2, \quad \triangle_3 = \Sigma a_i^3 - \Sigma b_i^3,$$

tendremos:

$$(3) \qquad 3 \propto^2 \triangle_1 + 3 \propto \rho \triangle_2 + \rho^2 \triangle_3 = 0$$

De esta ecuación se deduce, suponiendo $\triangle_3 \neq 0$:

$$(4) \qquad \rho = \frac{\propto}{2 \triangle_3} (-3 \triangle_2 \pm R)$$

siendo

$$(5) \qquad R = \sqrt{9 \triangle_2^2 - 12 \triangle_1 \triangle_3}\,.$$

Como los valores de x_i, y_i tendrán entonces el factor común $\propto$, se podrá siempre suponer $\propto = 1$.

Puesto que suponemos que x_i, y_i son soluciones (racionales) de la ecuación propuesta, la expresión

$$9 \triangle_2^2 - 12 \triangle_1 \triangle_3$$

será necesariamente un cuadrado perfecto.

Recíprocamente, si se escogen los parámetros a_i, b_i de manera que dicha expresión sea un cuadrado perfecto, se tendrá por las fórmulas (2) y (4) una solución (racional) de la ecuación (1). Como cada sistema de valores de los parámetros a, b da dos valores de ρ, se hallan en realidad dos soluciones de (1). Se supone $\triangle_3 \neq 0$, pues para $\triangle_3 = 0$ la ecuación (3) da un solo valor de ρ:

$$(6) \qquad \rho = -\frac{\triangle_1}{\triangle_2}\,.$$

Busquemos ahora las condiciones por las cuales el número R definido por la fórmula (5) será un número racional.

Se tiene:

$$R^2 = 9\,(a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2)^2 - 12\,(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)\,(a_1^3 + a_2^3 - b_1^3 - b_2^3).$$

Pongamos

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 - b_1 = \delta_1\,, & a_2 - b_2 = \delta_2 \\ a_1 + b_1 = \sigma_1\,, & a_2 + b_2 = \sigma_2\,, \end{cases}$$

se deduce:

$$a_1^2 - b_1^2 = \sigma_1\,\delta_1\,, \qquad a_2^2 - b_2^2 = \sigma_2\,\delta_2\,,$$

$$a_1^3 - b_1^3 = \frac{1}{4}\,\delta_1\,(\delta_1^2 + 3\,\sigma_1^2),$$

$$a_2^3 - b_2^3 = \frac{1}{4}\,\delta_2\,(\delta_2^2 + 3\,\sigma_2^2).$$

Sustituyendo estos valores en el de R^2, vendrá:

$$(8)\qquad R^2 = -\,9\,\delta_1\,\delta_2\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 3\,(\delta_1 + \delta_2)^2\,\left[(\delta_1 + \delta_2)^2 - 3\,\delta_1\,\delta_2\right].$$

Suponiendo enteros los valores de los parámetros a, b, los números σ y δ son también enteros y, por tanto, si R es un número entero, se tendrá necesariamente:

$$(9)\quad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 \equiv 0 & (\text{mód. } 3) \\ \delta_1\,\delta_2 < 0 \end{cases}$$

Si se pone

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = u \\ R = 3\,v \\ -\,\delta_1\,\delta_2 = A \\ \dfrac{1}{3}\,(\delta_1 + \delta_2)^2\,\left[(\delta_1 + \delta_2)^2 - 3\,\delta_1\,\delta_2\right] = k \end{cases}$$

la ecuación (8) se podrá escribir así:

$$(11) \qquad v^2 - Au^2 = -k.$$

siendo A y k enteros positivos.

3.—Suponiendo escogidos δ_1, δ_2 con las condiciones (9), si la ecuación (11) admite una solución (u_0, v_0), se podrá escoger arbitrariamente los valores de σ_1, σ_2, con tal de que la diferencia de los valores escogidos sea igual, en valor absoluto a u_0. Entonces, los parámetros a_i, b_i están determinados por las fórmulas (7) y ρ por la (4) y se hallarán las soluciones correspondientes de la ecuación (1) por las fórmulas (2).

Escojamos, por ejemplo

$$\delta_1 = 8, \qquad \delta_2 = -2$$

Se tendrá por las fórmulas (10):

$$A = 2^4, \qquad k = 2^4 . 3^2 . 7;$$

siendo A y k divisibles por 2^4, pongamos

$$v = 2^2 . v'$$

y la ecuación (11) se reduce a

$$v'^2 = u^2 - 63.$$

En esta forma se hallan fácilmente los valores de v', u; en efecto:

$$63 = 7 \times 9 = 3 \times 21 = 1 \times 63.$$

Los dos primeros factores dan la solución

$$v' = \frac{9 - 7}{2} = 1, \qquad u = \frac{9 + 7}{2} = 8$$

y los otros factores dan, respectivamente, las soluciones

$$v' = 9, \ u = 12; \qquad v' = 31, \ u = 32.$$

De la primera solución se deduce

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 8$$

y se puede tomar, p. ej.,

$$\sigma_1 = 10, \quad \sigma_2 = 2$$

Las fórmulas (7) darán:

$$a_1 = 9, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2$$

luego:

$$\triangle_1 = 6, \quad \triangle_2 = 76, \quad \triangle_3 = 720, \quad R = 12$$

o, dividiendo todos los valores por 2:

$$\triangle_1 = 3, \quad \triangle_2 = 38, \quad \triangle_3 = 360, \quad R = 6.$$

La fórmula (4) da, por $\alpha = 1$:

$$\rho = \frac{-19 \pm 1}{120}$$

o sea:

$$\rho = -\frac{3}{20}, \qquad \rho = -\frac{1}{6},$$

y, por las fórmulas (2), se hallarán las dos soluciones de (1):

$$(-7)^3 + 20^3 = 14^3 + 17^3$$

$$(-3)^3 + 6^3 = 4^3 + 5^3.$$

Consideremos la segunda solución de la ecuación (11): $v = 36$, $u = 12$; se tendrá

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 12$$

y podremos tomar $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = -8$; tendremos:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = -5, \quad b_1 = -2, \quad b_2 = -3$$

$$\triangle_1 = 6, \quad \triangle_2 = 48, \quad \triangle_3 = 126, \quad R = 108$$

o bien

$$\triangle_1 = 1, \ \triangle_2 = 8, \ \triangle_3 = 21, \ R = 18;$$

se deduce:

$$\rho = -\frac{1}{7}, \quad \rho = -1$$

y se tienen las dos identidades

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$(-5)^3 + 6^3 = 3^3 + 4^3.$$

De igual modo, se obtienen por la tercera solución, tomando, por ejemplo,

$$\sigma_1 = 34, \qquad \sigma_2 = 2$$

las dos soluciones de (1):

$$35^3 + 98^3 = 59^3 + 92^3$$

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Si en la primera solución ya estudiada de la ecuación (11) se cambia el orden de los índices en los valores de σ, es decir, siendo $\delta_1 = 8$, $\delta_2 = -2$, se toma

$$\sigma_1 = 2, \ \sigma_2 = 10,$$

resultará:

$$a_1 = 5, \ a_2 = 4, \ b_1 = -3, \ b_2 = 6$$

$$\triangle_1 = 6, \ \triangle_2 = -4, \ \triangle_3 = 0.$$

Los valores que se obtienen para los parámetros *a, b* constituyen, pues, una solución de (1). Entonces, la fórmula (4) no es aplicable, pero se halla por la (6):

$$\rho = \frac{3}{2}$$

y las fórmulas (2) dan la solución ya encontrada

$$14^3 + 17^3 = (-7)^3 + 20^3.$$

4.—En el caso precedente la resolución de la ecuación (11) es muy sencilla. Si se toma, por ejemplo,

$$\delta_1 = 37, \qquad \delta_2 = -19$$

la ecuación (11) será:

$$(12) \qquad 703\, u^2 - v^2 = 2^2.\ 3^4.\ 811.$$

Se ve que u y v son de la misma paridad. Si se les supone impares, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{r} u^2 \equiv v^2 \equiv 1 \\ 703 \equiv -1 \end{array}\right\} \text{(mód. 4)}.$$

y se deduce

$$-2 \equiv 0 \qquad \text{(mod. 4)}$$

lo que es absurdo. Por consiguiente, u, v son pares y poniendo

$$u = 2\, u', \qquad v = 2\, v'$$

se tendrá:

$$(13) \qquad 703\, u'^2 - v'^2 = 3^4.\ 811.$$

Es necesario examinar si la congruencia

$$x^2 - 703 \equiv 0 \qquad (\text{mód. } 3^4 \times 811)$$

es posible, para lo cual es necesario que lo sean:

$$x^2 - 703 \equiv 0 \qquad (\text{mód. } 3^4)$$

$$x^2 - 703 \equiv 0 \qquad (\text{mód. } 811)$$

La primera es evidentemente posible, pues

$$703 \equiv 1 \qquad (\text{mód. } 3)$$

y se tiene $x = 28$. En lo que respecta a la segunda, partiendo de

$$703 \equiv -108 \quad (\text{mód. } 811)$$

se halla por elevaciones sucesivas al cubo:

$$703^{81} \equiv 212$$

y como

$$212^{5} \equiv 1$$

resulta

$$703^{405} \equiv 1 \quad (\text{mód. } 811)$$

y una solución es $x = 56$.

Se hallará la solución siguiente de la ecuación (13):

$$u' = 30, \qquad v' = 753.$$

Por consiguiente.

$$u = 60, \qquad v = 1506.$$

Se tendrá, pues:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 60,$$

y si se toma:

$$\sigma_1 = 37, \qquad \sigma_2 = -23,$$

se tendrá:

$$a_1 = 37,\ b_1 = 0,\ a_2 = -21,\ b_2 = -2$$

$$\Delta_1 = 18,\ \Delta_2 = 1806,\ \Delta_3 = 41400,\ R = 4518$$

o, dividiendo por 6:

$$\Delta_1 = 3,\ \Delta_2 = 301,\ \Delta_3 = 6900,\ R = 753.$$

Por consiguiente,

$$\rho = -\frac{1}{92}, \qquad \rho = -\frac{3}{25}$$

y las fórmulas (2) dan las dos soluciones de (1):

$$55^3 + 113^3 = 92^3 + 94^3.$$

$$(-86)^3 + 88^3 = 25^3 + 31^3.$$

No nos ocuparemos de hallar otras soluciones de la ecuación (12).

5.—Vamos a mostrar ahora que el método expuesto permite obtener la solución general de la ecuación (1).

Tomemos los siguientes valores de los parámetros a, b:

$$(14) \begin{cases} a_1 = pq\,, & b_1 = pr \\ a_2 = m - q\,, & b_2 = m - r. \end{cases}$$

Se hallarán, después de suprimir el factor común $q - r$:

$$\triangle_1 = p - 1$$

$$\triangle_2 = (p^2 + 1)\ (q + r) - 2m$$

$$\triangle_3 = 3m\ (q + r) + (p^3 - 1)\ (q^2 + qr + r^2) - 3m^2.$$

Tomando $\rho = 1$, estos valores deberán satisfacer a la ecuación

$$\triangle_3 + 3\triangle_2 + 3\triangle_1 = 0$$

es decir:

$$3(q + r)\ [m + (p^2 + 1)] + (p - 1)$$
$$[(p^2 + p + 1)\ (q^2 + qr + r^2) + 3] - 3m\ (m + 2) = 0.$$

Esta ecuación se simplifica si se hace

$$m = -\ (p^2 + 1)$$

y se convierte después de suprimir el factor $p - 1$, supuesto diferente de cero, en la que sigue:

$$(p^2 + p + 1)\ (q^2 + qr + r^2)$$
$$= 3\,[(p^2 + 1)\ (p + 1) - 1] = 3\,p\ (p^2 + p + 1)$$

de donde:

$$(15) \qquad q^2 + qr + r^2 = 3\,p$$

Bastará escoger dos números racionales cualesquiera

$$q = \frac{q'}{w}, \qquad r = \frac{r'}{w}$$

tales que

$$(16) \qquad q' \equiv r' \quad (\text{mód. } 3)$$

y se tendrá entonces por las fórmulas (2) y (14) los valores siguientes de las indeterminadas:

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = 1 + pq \\ x_2 = r + p^2 \\ y_1 = q + p^2 \\ y_2 = 1 + pr \end{cases}$$

estando q, r definidos como hemos dicho y p determinado por la fórmula (15). Por un simple cambio de notación estas fórmulas coinciden con las de Euler-Binet. En efecto, basta poner:

$$q = a + 3b, \qquad r = a - 3b$$

de donde:

$$p = \frac{1}{3}\,(q^2 + qr + r^2) = a^2 + 3b^2$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (17), se hallan las fórmulas de Binet. Como hemos demostrado [1] que éstas suministran la solución general de la ecuación (1), resulta que las fórmulas (17) dan también la solución general cuando se asignan a q, r valores racionales cualesquiera que satisfagan a la condición (16) y a p el valor expresado por la fórmula (15).

Damos una tabla con 100 soluciones de la ecuación (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] DUARTE, F. J.—*Sur les équations diophantiennes* $x^2+y^2+z^2=t^2$, $x^3+y^3+z^3=t^3$. *L'Enseignement Mathématique* XXXIII Anné, París, 1934, p. 78-87.

[2] FERMAT, P.—*Œuvres,* t. III, p. 538, París, 1896.

[3] *L'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. VIII, París, 1901, p. 224.

[4] *L'Intermédiaire des Math.* t. IX, 1902, p. 51 y t. XI, 1904, p. 96 y 289.

[5] EULER, L.—*Elémens d'Algèbre, Lyon* 1795, t. II, p. 360.

[6] BINET, *Comptes Rendus des Séances de L'Acad. des Sc. de Paris,* t. XII, 1841, p. 248.

[7] *L'Intermédiaire des Math.,* t. IV, 1897, p. 63.

[8] *Nouvelles Annales de Math.,* t. XI, París, 1872, p. 5.

[9] HERMITE, Ch.—*Œuvres,* t. III, París. 1912, p. 115.

[10] MIRIMANOFF, D.—*Nouvelles Annales de Math.* t. III 2e série, 1903, p. 17.

[11] DICKSON, L. E.—*History of the Theory of Numbers,* Vol. II, 1920, p. 550-561.

[12] HARDY AND WRIGHT.—*Theory of Numbers,* Oxfordd, 1938, p. 200.

TABLA

DE 100 SOLUCIONES DE LA ECUACION

$$x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$$

x_1	x_2	y_1	y_2
3	4	—5	6
1	6	—8	9
1	12	10	9
2	16	15	9
16	33	34	9
3	10	—18	19
10	27	19	24
7	14	—17	20
11	15	—27	29
2	34	15	33
12	40	31	33
26	36	17	39
22	59	3	60
38	48	—79	87
92	94	55	113
64	75	51	82
2	40	—17	41
263	571	29	589
35	98	59	92
23	41	—16	44

x_1	x_2	y_1	y_2
25	31	—86	88
33	96	20	97
24	197	—379	396
30	67	51	58
4	152	41	151
5	310	66	309
6	552	97	551
25	167	64	164
62	438	125	435
27	165	100	152
1831	9740	4831	9350
3	34	—114	115
12	51	38	43
—4	25	17	22
—113	284	116	271
41	319	72	318
250	305	22	353
12	86	—159	167
29	99	60	92
86	41	2	89

x_1	x_2	y_1	y_2
118	257	20	265
145	498	—1151	1182
1	71	—138	144
3	245	—340	378
305	244	—1256	1265
88	95	—412	415
7292	5015	2792	7895
3592	4965	4092	4645
309032	390545	313532	387665
1233	1756	1270	1737
188	298	225	279
220	183	58	255
10	184	67	181
18	139	94	123
38	1379	371	1370
10	161	84	153
26	78	—55	87
186	193	121	228
214	1844	343	1841
—47	111	16	108

x_1	x_2	y_1	y_2
31	1867	397	1861
216	1187	363	1178
511	4088	—1025	4112
7999	159980	—16001	160040
19396	82433	—39560	85697
5	315	248	252
535	792	292	855
1028	1765	1445	1528
155	404	—1096	1115
23	134	95	116
168	705	385	668
389	860	461	842
5	1948	—2552	2885
1897	1914	—144	2401
9	183	—220	256
223	1767	120	1766
1041	5210	1968	5129
58	759	175	756
263	1140	906	911
95	219	—31	225

x_1	x_2	y_1	y_2
517	2219	1546	1946
285	1296	797	1192
1289	6327	3476	5976
831	4785	2162	4642
5	76	48	69
76	590	451	485
167	1254	815	1128
463	4040	1999	3872
680	6498	2867	6309
317	3310	1317	3240
1282	14564	5275	14333
8	53	29	50
102	157	76	165
284	305	113	368
73	138	150	—71
43	84	88	—21
—127	260	248	65
281	782	—55	794
58188	247299	184262	208507
73	144	1	150