Estudio analítico sobre el teorema de la conservación de las áreas desde el punto de vista de la "Cuestión del Gato"

Leído en el Colegio de Ingenieros de Venezuela, en sesión del 24 de junio de 1895

Me propongo en el presente estudio dar fuerza a la explicación ya emitida de la rotación, aparentemente paradógica, del gato en el espacio, sin el auxilio de ningún impulso exterior.

Dicho asunto ha parecido aparentemente en contradicción con una de las leyes mejor demostradas de la Mecánica: la ley de la conservación de las áreas, cuando no existen fuerzas exteriores que obren sobre el sistema.

La ley de la conservación de las áreas se deduce de otro principio, que se enuncia como sigue: la suma de los momentos de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales de un sistema, tomados dichos momentos con respecto a un eje cualquiera, varía al igual de la suma de los momentos, con respecto al mismo eje, de los impulsos de las fuerzas exteriores que obran sobre las diversas moléculas materiales. Este principio se demuestra fácil y rápidamente, considerando la velocidad en un instante cualquiera, como la resultante de la velocidad en el instante anterior y de la aceleración elemental entre dichos dos instantes; pasando de las velocidades a las cantidades de movimiento, e integrando dos veces de seguida, primero con relación al tiempo y luego con respecto a la masa. No quiero abusar de la benévola atención de mis colegas repitiendo demostraciones que se encuentran en todos los tratados de Mecánica, y pasaré adelante dando por sentado dicho principio.

De él se deduce que cuando no hay fuerzas exteriores, el incremento de los momentos de las cantidades de movimiento es nulo, porque lo es la cantidad a la cual es igual, los momentos de los impulsos de las fuerzas durante el tiempo considerado. Así pues, expresándome de otro modo, diré que en dicho caso la suma de los momentos de las cantidades de movimiento de todas las moléculas del cuerpo debe ser constante en un instante cualquiera, por tanto, de modo análogo para una molécula: $M^t \, dm \times v = C$.

Refirámonos ahora al caso de un cuerpo aislado en el espacio y en reposo, pero capaz de desarrollar acciones interiores, tendremos para la inmovilidad, y también para un instante cualquiera posterior, si no se ha ejercido sino una acción interior: $M^t \, dm \times v = 0$.

Tomando el momento con respecto al eje de figura del cuerpo, para lo cual llamaremos *r* la distancia de una molécula a dicho eje, y observando que la velocidad *v* de circulación es igual al producto de la velocidad *w* por el radio de rotación *r*, y que el movimiento debido a un impulso único debe ser uniforme, tendremos, si llamamos θ el ángulo de rotación que comunica al cuerpo la acción interior, y *t* el tiempo de duración del movimiento: $dm \times \frac{\theta}{t} r^2 = 0$

Y para la totalidad de las moléculas, será, multiplicando por *t* los dos miembros:

$$dm \times \theta r^2 + dm \times \theta r'^2 + dm \theta r''^2 + \ldots = 0$$

Esta última ecuación nos dice que la suma de los productos análogos θr^2, será igual a cero. Pero θr^2 es el doble del área descrita por una molécula, así pues, la suma de las áreas descritas por las diversas moléculas del cuerpo debe ser cero.

Se deduce de esta consideración, que si un hombre aislado en el espacio, en posición vertical por ejemplo, trata de efectuar una rotación de su cuerpo alrededor de su eje de figura, mediante un esfuerzo muscular interior, cada una de sus moléculas describirá cierta área; y como la suma de las áreas descritas debe ser igual o cero, se efectuará inmediatamente una reacción contraria, de modo tal que la suma de las áreas negativas ahora descritas sea igual a la suma de las primitivas positivas: el hombre volverá a su posición inicial sin haber logrado girar el más pequeño ángulo.

¿Pero cómo se compadece este resultado con el hecho que se observa cuando dejando caer un gato boca abajo, se lo ve, sin embargo, tocar el suelo con las patas traseras, habiendo efectuado evidentemente una rotación alrededor del eje trasversal mediano de su cuerpo? Veamos cómo puede explicarse esta aparente contradicción.

El caso del hombre presenta una completa analogía con el del gato, ya que ambos pueden desarrollar acciones musculares semejantes, así nos concretaremos al primero.

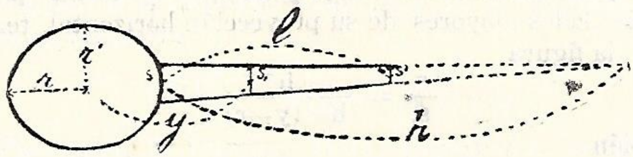
¿Puede el hombre aludido, por medio de algún artificio especial, girar alrededor de su eje? Sí, del modo siguiente:

Supongamos que con un brazo extendido ejerce una acción interior e imprime a su cuerpo un movimiento de rotación; si al finalizar esta, cuando principia a nacer la reacción, encoge el brazo colocándolo a lo largo del cuerpo, las grandes áreas descritas en el movimiento positivo, digámoslo así, por las moléculas del brazo, serán sustituidas por áreas de menor radio, y para conservar el mismo valor superficial deberán aumentar su base, que es el arco correspondiente al ángulo de reacción, este resultará por tanto mayor que el de acción, y se habrá conseguido avanzar algún tanto en el sentido de la rotación negativa. Este procedimiento, varias veces repetido, permitiría a dicho sujeto efectuar una vuelta completa alrededor de su eje.

Había leído en un periódico científico francés la anterior explicación del asunto que nos ocupa cuando a excitación de nuestro digno Presidente se me ocurrió desarrollarla en análisis y llegar hasta las conclusiones que de ella pueden deducirse, averiguando el número de esfuerzos de determinado valor que serían necesarios para lograr una vuelta completa.

Pido excusas a mi indulgente e ilustrado auditorio por la inhabilidad del desempeño en el difícil desenvolvimiento de una tesis analítica, debido a la escasez de mis conocimientos y a la carencia de libros de consulta adecuados.

Considero el cuerpo del hombre como un cilindro vertical de sección elíptica, al cual va adaptado el brazo en el extremo del eje mayor de una de sus secciones horizontales, y doy a dicho miembro la formación de un tronco de cono. La proyección horizontal de este sistema está representada en la figura (1).



Aplicaremos la fórmula ya mencionada. $dm \times \theta r^2 = 0$, que para un sistema de moléculas será: $\theta \Sigma r^2 dm = 0$.

Consideremos primero el tronco del cuerpo, sus moléculas principian por describir cada una un ángulo positivo θ, y luego uno negativo mayor en la reacción, que llamaremos $\theta + a$; es el valor de a el que me propongo determinar.

Las áreas descritas con el ángulo positivo θ compensarán la porción de las negativas correspondientes también al ángulo θ, y sólo deberán figurar en la ecuación del problema las porciones de estas últimas formadas por el ángulo α, tendremos pues como primer término $- a \Sigma r^2 dm$.

$\Sigma r^2 dm$ es el momento de inercia del cilindro elíptico con relación a su eje de figura, que se obtendrá multiplicando el momento de inercia, tomado del mismo modo, de su sección recta, cuyos semi-ejes los llamamos r y r', por la altura del hombre que designaremos por H. Este procedimiento equivale a no hacer cuenta de la densidad de la sustancia que forma el cuerpo humano, lo motivaremos racionalmente más adelante y el primer término definitivamente será:

$$- a \frac{\Pi H}{4} (rr'^3 + r'r^3) \quad (1^o)$$

El brazo dará origen a dos términos, el uno para las áreas positivas, el otro para las negativas, consideremos el 1º El ángulo descrito por el brazo, cuando la acción, será θ, se trata de obtener el momento de inercia de dicho brazo con respecto al eje del cuerpo. Para ello llamando s el radio de su sección recta en el punto de inserción, y s' en el extremo, determinaremos el s, que corresponde a la sección hecha a una distancia y del eje de los momentos, en función de esta distancia; designamos también por l la longitud del brazo y por h la altura del triángulo que se forma prolongando los lados mayores de su proyección horizontal, tendremos en la figura

$$\frac{s}{s,} = \frac{h}{h-(y-r)}$$

y también

$$\frac{s'}{s,} = \frac{h-l}{h-(y-r)}$$

de la primera se deduce:

$$h = \frac{s(y-r)}{s-s,}$$

e introduciéndolo en la segunda, viene:

$$\frac{s'}{s,} = \frac{\frac{s(y-r)}{s-s,}-l}{\frac{s(y-r)}{s-s,}-(y-r)}$$

y simplificando:

$$\frac{s'}{s,} = \frac{s(y-r)-ls-ls,}{s,(y-r)}$$

haciendo desaparecer denominadores y despejando a s, viene

$$s, = \frac{(y-r)(s-s')}{l} - s$$

a la que puede darse la forma

$$s, = \frac{s-s'}{l}y - \left(r\frac{s-s'}{l} + s\right)$$

y haciendo

$$\frac{s-s'}{l} = K; \frac{r(s'-s)}{l} - s = K',$$

se obtiene finalmente:

$$s_{,} = K y + K'$$

el momento de inercia del brazo será pues:

$$\int_{r}^{r+l} \Pi (K\ y + K')^2 y^2 dy$$

pues el elemento será $\Pi\ (K\, y + K')^2 dy$, r^2 el cuadrado del radio de rotación, y el brazo va de $y = r$ á $y = r + l$. También esta vez, así como en 3º término, haremos caso omiso de la densidad de la materia humana, y el 2º término tendrá por valor definitivo

$$+\,\theta \int_{r}^{r+l} \Pi (K\ y + K')^2 y^2 dy\,,$$

Pasemos al 3º término, el que engendra la reacción del brazo colocado a lo largo del cuerpo, de modo tal que las proyecciones horizontal y vertical son las que se ven en las figuras (2) y (3). El ángulo descrito en esta reacción será $\theta + a$, se trata de buscar el momento de inercia alrededor del eje c, para lo cual nos serviremos del momento de inercia alrededor del eje c' y del teorema que nos da el momento de inercia alrededor de un eje cualquiera cuando es conocido el correspondiente a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad. Dicho teorema está expresado por la siguiente relación:

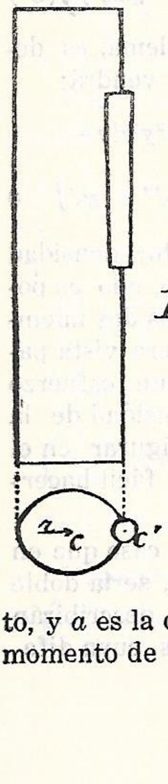


Fig (3)
Fig (2)

$$\Sigma\ m r^2 = \Sigma m r'^2 + a^2\, \Sigma\, m\,.$$

El primer término, $\Sigma m r^2$, es el momento de inercia correspondiente al eje que no pasa por el centro de gravedad, $\Sigma m r'^2$ es el que corresponde al que pasa por este punto, y a es la distancia entre los dos ejes, en este caso r. El momento de inercia del brazo con relación a su eje será en la posición considerada, el resultado que se obtenga integrando entre los límites cero y l al producto del momento de inercia de la sección de dicho brazo, en un punto cualquiera, por el elemento de su altura, es decir:

$$\Sigma\, m\, r'^2 = \int_0^l \frac{\Pi (K\, y + K')^4 d\, y}{2}$$

el 2º término del teorema de conversión, $a^2 \Sigma m$, es en nuestro caso r^2 por el volumen del brazo, que es un tronco de cono, así pues:

$$a^2 \Sigma\, m = \tfrac{1}{3} \Pi\, r^2 l\, (s^2 + s'^2 + ss')$$

Por tanto el momento de inercia del brazo en su 2ª posición, con respecto al eje del cuerpo, será:

$$\int_0^l \frac{\Pi\ (k\, y + k')^4\, dy}{2} + \tfrac{1}{3} \Pi\, r^2 l (s^2 + s'^2 + ss')$$

y el 3º término de nuestra ecuación, será:

$$-(\theta + a)\left(\int_0^l \frac{\Pi (ky + k')^4\, dy}{2} + \tfrac{1}{3} \Pi r^2 l (s^2 + s'^2 + ss')\right) \quad (3º)$$

Estableciendo pues dicha ecuación del problema, es decir, igualando a cero la suma total de las áreas, vendrá:

$$-\frac{a \Pi H}{4} (r\, r'^3 + r' r^3) + \theta \int_r^{r+l} \Pi (ky + k')^2 y^2 dy -$$

$$(\theta + a) \int_0^l \frac{\Pi (ky + k')^4\, dy}{2} - \tfrac{1}{3} (\theta + a) \Pi r^2 l (s^2 + s'^2 + ss') = 0$$

Recordemos que hemos prescindido del factor densidad en cada uno de los términos del primer miembro, ello es posible porque equivale a dividir por dicho factor los dos miembros de la ecuación. Y aunque pudiera a primera vista parecer que la rotación que se logre obtener para un esfuerzo dado será tanto menor cuanto mayor sea la densidad de la materia orgánica, y que por tanto debe esta figurar en el problema, no hay tal en realidad, como es muy fácil hacerlo ver.

En efecto, si la densidad fuera doble en un caso que en otro, suponiendo la misma forma para el cuerpo, sería doble también el número de moléculas del brazo que describirán áreas, primero positivas y luego negativas, áreas cuya diferencia, podemos decirlo así, representan el esfuerzo motor que ha de imprimir la rotación a un cuerpo doblemente pesado, claro es que el efecto sería el mismo que en el caso primero.

Transformemos nuestra ecuación sacando las constantes fuera de las integrales y haciendo los desarrollos indicados.

$$-\frac{a\Pi H}{4}(rr'^3+r'r^3)+\Pi\theta\int_r^{r+l}dy\,(k^2y^4+2ky^3k'+k'^2y^2)$$

$$-\frac{\Pi(\theta+a)}{2}\int_0^l dy\,(k^4y^4+4k^3y^3k'+6k^2y^2k'^2+4kyk'^3+k'^4)$$

$$-\tfrac{1}{3}(\theta+l)\Pi r^2 l(s^2+s'+ss')=0$$

Efectuando las integraciones indicadas, viene:

$$-\frac{a\Pi H}{4}(rr'^3+r'r^3)+\Pi\theta\Big(\frac{k^2}{5}((r+l)^5-r^5)+\frac{kk'}{2}$$

$$((r+l)^4-r^4)+\frac{K'2}{3}((r+l)^3-r^3)\Big)$$

$$-\frac{\Pi(\theta+a)}{2}\Big(\frac{K^4l^5}{5}+k^3k'l^4+2k^2k'^2l^3+k^2k'^3l^2+k'^4l\Big)$$

$$-\tfrac{1}{3}(\theta+a)\Pi r^2 l(s^2+s'^2+ss')=0$$

Transformando y reuniendo en el 2º miembro los términos afectados de a, vendrá:

$$\Pi\theta\Big(\frac{k^2}{5}((r+l)^5-r^5)+\frac{kk'}{2}((r+l)^4-r^4)+$$

$$\frac{k'^2}{3}((r+l)^3-r^3)\Big)$$

$$-\frac{\Pi\theta}{3}\Big(\frac{k^4l^5}{5}+k^3k'l^4+2k^2k'^2l^3+2kk'^3l^2+k'^4l\Big)$$

$$-\frac{\Pi\theta}{3}r^2l(s^2+s'^2ss')=$$

$$a\Big(\frac{\Pi H}{4}(rr'^3+r'r^3)+\frac{\Pi}{2}\Big(\frac{k^4l^5}{5}+k^3k'l^4+2k^2k'^2l^3$$

$$+2kk'^3l^2+k'^4l\Big)+\tfrac{1}{3}\Pi r^2l(s^2+s'^2+ss')$$

Hagamos ahora:

$$\Pi\Big(\frac{k^2}{5}((r+l)^5-r^5)+\frac{kk'}{2}((r+l)^4-r^4)$$

$$+\frac{k'2}{3}\Big((r+l)^3-r^3\Big)=A$$

$$\frac{\Pi}{2}\Big(\frac{k^4 l^5}{5}+k^3 k' l^4+2k^2k'^2 l^3+2k\,k'^3 l^2+k'^4 l\Big)=B$$

$$\tfrac{1}{3}\,\Pi\,r^2 l(s^2+s'^2+ss')=C$$

$$\frac{\Pi H}{4}\Big(r\,r'^3+r'\,r^3\Big)=D$$

y vendrá:

$$A\theta-B\theta-C\theta=a\,(D+B+C)$$

de donde:

$$a=\frac{\theta(A-B-C)}{B+C+D}$$

He calculado esta fórmula con los siguientes valores, que he creído poder atribuir a un hombre de corpulencia ordinaria:

$H=1,^{m}60$ $l=0,^{m}60$ $r=0,^{m}20$ $r'=0,^{m}15$ $S=0,^{m}045$

$S'=0,^{m}03$

Obtuve para k y k':

$$k=0{,}025\quad k'=-0{,}05$$

Y para los coeficientes A, B, C, D:

$$A=0{,}00064804$$
$$B=0{,}00000327$$
$$C=0{,}00010744$$
$$D=0{,}00246364$$

Resulta para a, si se supone que el esfuerzo muscular del individuo lo hace describir un ángulo de $90^\circ=\frac{\Pi}{2}$.

$$a=0{,}\ 328$$

y convirtiéndolo en arco

$$a=18^\circ-48'$$

Es decir que, aproximadamente, una serie de 19 esfuerzos de los que hemos considerado permitirían al sujeto en cuestión efectuar una revolución completa alrededor de su eje. Se comprende que una serie de movimientos análogos podrían ser atribuidos al gato, y quedaría explicado el aparente misterio, sin que la mecánica haya tenido que sufrir el más ligero quebranto.

Luis Ugueto.