Notas matemáticas

POR EL DOCTOR FRANCISCO JOSE DUARTE,
Individuo de Número de la Academia

Sobre una aplicación del método de los coeficientes indeterminados a los determinantes

Supongamos que se tengan n ecuaciones lineales entre las n incógnitas $x_1, x_2 \,..\, x_n$, de la forma:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_i & .. & x_n & k \\ a'_1 & a'_2 & .. & a'_i & .. & a'_n & a'_{n+1} \\ b'_1 & b'_2 & .. & b'_i & .. & b'_n & b'_{n+1} \\ \dots & & & & & & \dots \\ l'_1 & l'_2 & .. & l'_i & .. & l'_n & l'_{n+1} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_i & .. & x_n & k \\ a''_1 & a''_2 & .. & a''_i & .. & a''_n & a''_{n+1} \\ b''_1 & b''_2 & .. & b''_i & .. & b''_n & b''_{n+1} \\ \dots & & & & & & \dots \\ l''_1 & l''_2 & .. & l''_i & .. & l''_n & l''_{n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

etc. y que se puedan determinar los coeficientes $A', B', \ldots, L'$; $A'', B'', \ldots, L''$, etc. tales que $A' a'_i + B' b'_i + \ldots + L' l'_i = A'' a''_i + B'' b''_i + \ldots + L'' l''_i = \ldots . (i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Entonces los valores de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$, que verifican simultáneamente las ecuaciones (1) serán dados por las fórmulas:

$$(2)\quad x_i = \frac{k\,(A' a'_i + B' b'_i + \ldots + L' l'_i)}{A' a'_{n+1} + B' b'_{n+1} \ldots + L' l'_{n+1}}$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

suponiendo que

$$A' a'_{n+1} + B' b'_{n+1} + \ldots + L' l'_{n+1} \neq 0 .$$

La observación que acabamos de hacer puede aplicarse a numerosas cuestiones. En esta Nota nos proponemos hacer ver el partido que puede sacarse de este método para la demostración o la resolución de diversas cuestiones de Geometría.

1. Teorema de DESARGUES.—*Si las rectas que unen los vértices homólogos* 1, 1'; 2, 2'; 3, 3' *de dos triángulos cuales-*

quiera 1 2 3, 1' 2' 3', *situados o no en un mismo plano, concurrren en un mismo punto* 0, *los lados homologos* 1 2, 1' 2'; 2 3, 2' 3'; 1 3, 1' 3' *se encuentran, respectivamente, en tres puntos* a, b, c *situados en línea recta y recíprocamente.*

Las coordenadas de tres puntos 1', 2', 3' pueden escribirse bajo la forma:

$$\frac{x_0 + \lambda_i x_i}{1 + \lambda_i}, \quad \frac{y_0 + \lambda_i y_i}{1 + \lambda_i}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Las ecuaciones de las rectas 1 2, 1' 2' serán:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 + \lambda_1 x_1 & y_0 + \lambda_1 y_1 & 1 + \lambda_1 \\ x_0 + \lambda_2 x_2 & y_0 + \lambda_2 y_2 & 1 + \lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$$

Si se toma $A' = \lambda_1$, $B' = -\lambda_2$; $A'' = 1$, $B'' = -1$ se tendrá inmediatamente:

$$(3) \qquad x_a = \frac{\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad y_a = \frac{\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

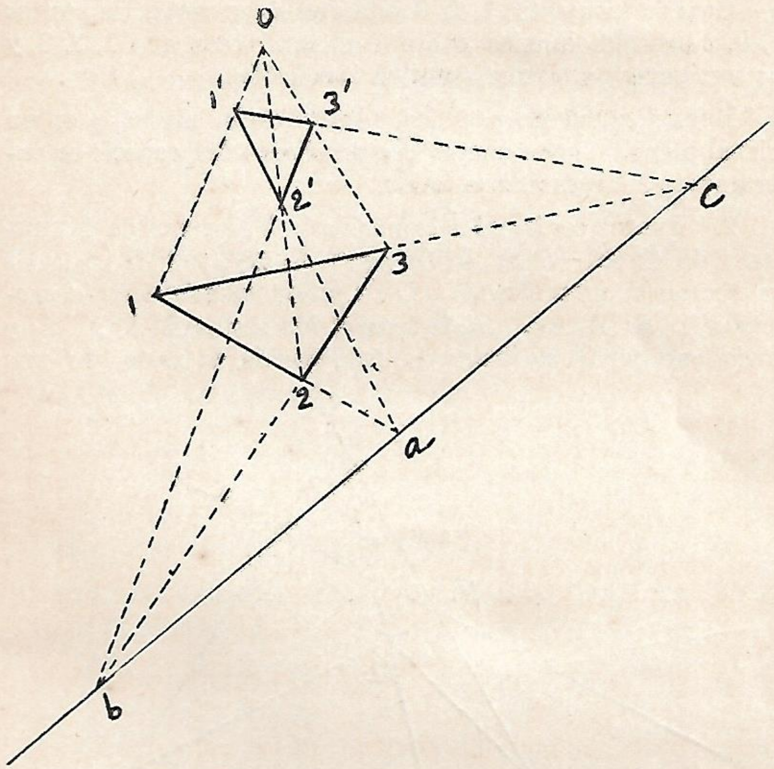
coordenadas del punto de encuentro a de las rectas 1 2, 1' 2'. Para los puntos b y c se tendrá:

$$(4) \quad \begin{cases} x_b = \dfrac{\lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3}{\lambda_2 - \lambda_3}, & y_b = \dfrac{\lambda_2 y_2 - \lambda_3 y_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \\[2ex] x_c = \dfrac{\lambda_3 x_3 - \lambda_1 x_1}{\lambda_3 - \lambda_1}, & y_c = \dfrac{\lambda_3 y_3 - \lambda_1 y_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \end{cases}$$

Se tiene idénticamente

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

lo que demuestra el teorema.



La recíproca se deduce de considerar los tres pares de puntos c, 1, 1' ; b, 2, 2' que son tales que las rectas b c, 1 2, 1' 2' concurren en *a*. Luego las rectas c 1 y b 2; c 1' y b 2' ; 1 1' y 2 2' tienen sus intersecciones 3, 3', 0 en línea recta. Es decir, que la recta 3 3' pasa por la intersección 0 de 1 1' y 2 2'.

Las fórmulas (3) y (4) dan:

$$\frac{a\,1}{a\,2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ ; \quad \frac{b\,2}{b\,3} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\ , \quad \frac{c\,1}{c\,3} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

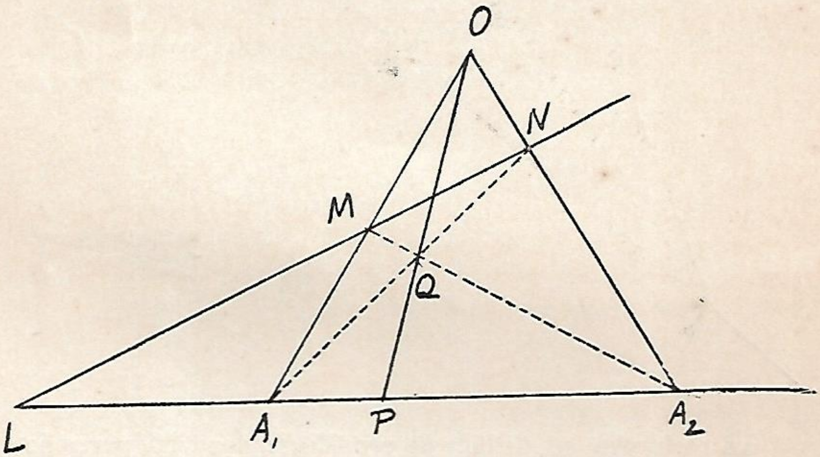
Luego:

$$(5) \quad \frac{a\,1}{a\,2} \cdot \frac{b\,2}{b\,3} \cdot \frac{c\,3}{c\,1} = 1$$

Cuando los puntos 1, 2, 3 están en línea recta, los puntos a, b, c estarán situados sobre la misma recta que 1, 2, 3 y los tres pares de puntos están en involución.

Hemos supuesto que los puntos están situados en un mismo plano. La demostración en el caso del espacio es enteramente análoga a la anterior.

2. Puntos conjugados armónicos. Teoremas de MENELAO y de CEVA.—*Sean* A_1 (x_1, y_1) A_2 (x_2, y_2) O (x_0, y_0) *los vértices de un triángulo y* L *un punto tomado sobre la prolongación de* $A_2 A_1$. *Si se trazan las rectas* $M A_2$, $N A_1$ *y se designa por* Q *su punto de intersección, la recta que une*



los puntos O *y* Q *encuentra* $A_2 A_1$ *en un punto* P *que es independiente de la posición del vértice* O *del triángulo y de la posición de la secante* LMN *cuanto ésta gira alrededor del punto* L. *El punto* P *será el conjugado armónico de* L *con respecto a los puntos* A_1 A_2.

Podemos escribir las coordenadas de los puntos L, M, N así:

$$L\left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}\right)$$

$$M\left(\frac{x_0 + \mu x_1}{1 + \mu}, \quad \frac{y_0 + \mu y_1}{1 + \mu}\right)$$

$$N\left(\frac{x_0 + v\,x_2}{1+v},\quad \frac{y_0 + v\,y_2}{1+v}\right)$$

Las ecuaciones de las rectas A_1 N y A_2 M serán:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 + v\,x_2 & y_0 + v\,y_2 & 1+v \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 + \mu\,x_1 & y_0 + \mu\,y_1 & 1+\mu \end{vmatrix} = 0$$

Tomando $A' = \mu$, $B' = 1$; $A'' = V$, $B'' = 1$, se tendrá:

$$x = \frac{x_0 + \mu\,x_1 + v\,x_2}{1 + \mu + v}, \quad y = \frac{y_0 + \mu\,y_1 + v\,y_2}{1 + \mu + v}$$

para las coordenadas del punto Q.

La ecuación de la recta O Q será

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + \mu\,x_1 + v\,x_2 & y_0 + \mu\,y_1 + v\,y_2 & 1 + \mu + v \end{vmatrix} = 0$$

y se trata de hallar las coordenadas del punto en que esta recta encuentra $A_1 A_2$, cuya ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Haciendo $A' = -1$, $B' = 1$; $A'' = \mu$, $B'' = v$, se tendrá para las coordenadas del punto P:

$$(6) \quad x = \frac{\mu\,x_1 + v\,x_2}{\mu + v}, \quad y = \frac{\mu\,y_1 + v\,y_2}{\mu + v}$$

Ahora, se pueden calcular las coordenadas del punto L buscando la intersección de la recta M N con $A_1 A_2$. La ecuación de M N es:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 + \mu\,x_1 & y_0 + \mu\,y_1 & 1 + \mu \\ x_0 + v\,x_2 & y_0 + v\,y_2 & 1 + v \end{vmatrix} = 0$$

Si se hace $A' = 1$, $B' = -1$; $A'' = \mu$, $B'' = V$, se hallará:

$$x = \frac{\mu x_1 - v x_2}{\mu - v}, \quad y = \frac{\mu y_1 - v y_2}{\mu - v}$$

para las coordenadas de L. Por consiguiente, resulta:

$$(7) \qquad \lambda = \frac{v}{\mu}$$

y por consiguiente las coordenadas de P pueden escribirse así:

$$(8) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Resulta, pues, comparando estas coordenedas con las de L, que P es el conjugado armónico de L respecto de A_1, A_2.

Se tiene:

$$\frac{L A_1}{L A_2} = \lambda; \quad \frac{P A_1}{P A_2} = -\lambda; \quad \frac{M O}{M A_1} = -\mu; \quad \frac{N O}{N A_2} = -V$$

y teniendo presente la relación (7), $\lambda \mu = V$, resulta:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{L A_1}{L A_2} \dfrac{M O}{M A_1} \dfrac{N A_2}{N O} = 1 \\[2ex] \dfrac{P A_1}{P A_2} \dfrac{M O}{M A_1} \dfrac{N A_2}{N O} = -1 \end{cases}$$

De estas ecuaciones se deducen los teoremas conocidos de Geometría y sus recíprocos conocidos con los nombres de teoremas de MENELAO y de CEVA.

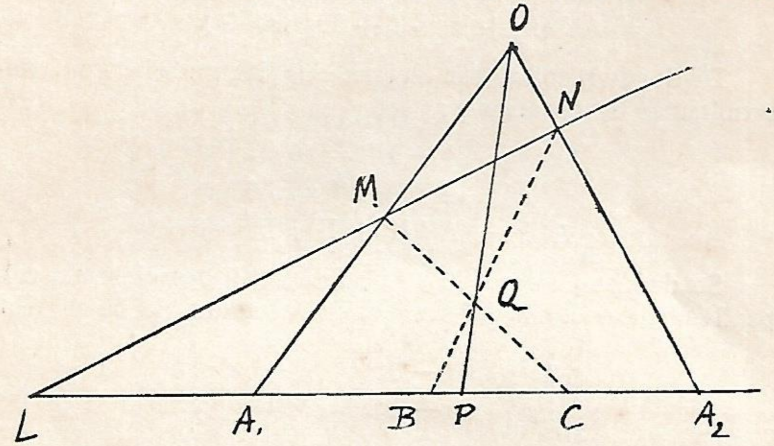
3. Puntos en involución.—*Se dan los puntos*

$$A_1 (x_1, y_1), \quad A_2 (x_2, y_2), \quad B\left(\frac{x_1 + k_b x_2}{1 + k_b}, \frac{y_1 + k_b y_2}{1 + k_b}\right)$$

$$C\left(\frac{x_1 + k_c x_2}{1 + k_c}, \frac{y + k_c y_2}{1 + k_c}\right), \quad L\left(\frac{x_1 - k_l x_2}{1 - k_l}, \frac{y_1 - k_l y_2}{1 - k}\right)$$

que están, por consiguiente, en línea recta.

Se toma un punto cualquiera O $(x_0 y_0)$ *y se le une con* A_1 *y* A_2 *por las rectas* O A_1 *y* O A_2. *En el plano así determinado se lleva por* L *una secante cualquiera que* *corta las rectas* O A_1, O A_2 *en* M *y* N. *Sea* Q *el punto de intersección de las rectas* C M *y* B N. *El punto* P *determinado por la intersección de las rectas* O Q *y* $A_1 A_2$ *es independiente de la posición del punto* O *y de la posición de la*



secante L M N *cuando esta gira alrededor del punto* L. *Los puntos* L, A_1, B, P, C, A_2 *están en involución.*

Escribamos las coordenadas de los puntos M, N bajo las formas

$$M\left(\frac{x_0+\mu x_1}{1+\mu}, \frac{y_0+\mu y_1}{1+\mu}\right), \quad N\left(\frac{x_0+v x_2}{1+v}, \frac{y_0+v y_2}{1+v}\right)$$

Se tendrá, según lo demostrado en el párrafo anterior

$$v = \mu k_1 .$$

Las ecuaciones de las rectas B N y C M serán:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 + k_b x_2 & y_1 + k_b y_2 & 1 + k_b \\ x_0 + \mu k_1 x_2 & y_0 + \mu k_1 y_2 & 1 + \mu k_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 + k_c x_2 & y_1 + k_c y_2 & 1 + k_c \\ x_0 + \mu x_1 & y_0 + \mu y_1 & 1 + \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Para determinar la solución común de esas dos ecuaciones, es decir, las coordenadas del punto Q, establezcamos las ecuaciones de condición:

$$A' (x_1 + k_b x_2) + B' (x_0 + \mu k_l x_2)$$
$$= A'' (x_1 + k_c x_2) + B'' (x_0 + \mu x_1)$$

De donde resulta para determinar los coeficientes indeterminados las ecuaciones:

$$B' - B'' = 0$$
$$A' - A'' - B'' \mu = 0$$
$$A' k_b - A'' k_c + B' \mu k_l = 0$$

Se deduce pues que A', A'', B' son proporcionales, respectivamente, a los determinantes deducidos de la matriz:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -\mu \\ k_b & -k_c & \mu k_l \end{matrix} \right\|$$

Podemos, pues, tomar

$$A' = \begin{vmatrix} -1 & -\mu \\ -k_c & \mu k_l \end{vmatrix} = -\mu (k_c + k_l)$$

$$A'' = -\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ k_b & \mu k_l \end{vmatrix} = -\mu (k_b + k_l)$$

$$B' = B'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k_b & -k_c \end{vmatrix} = k_b - k_c .$$

Resulta, pues, para las coordenadas de Q:

$$x = \frac{(k_c - k_b) x_0 + (k_c + k_l) \mu x_1 + (k_b + k_l) \mu k_c x_2}{k_c - k_b + (k_c + k_l) \mu + (k_b + k_l) \mu k_c}$$

$$y = \frac{(k_c - k_b) y_0 + (k_c + k_l) \mu y_1 + (k_b + k_l) \mu k_c y_2}{k_c - k_b + (k_c + k_l) \mu + (k_b + k_l) \mu k_c}$$

La ecuación de la recta O Q será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ (k_c - k_b)x_0 + (k_c + k_l)\mu x_1 + (k_b + k_l)\mu k_c x_2 & (k_c - k_b)y_0 + .. & k_c - k_b + .. \end{vmatrix} = 0$$

Es necesario, para hallar las coordenadas de P, determinar los valores x, y, que hacen idénticamente nulo este determinante al mismo tiempo que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se ve inmediatamente que bastará hacer

$$A' = -(k_c - k_b), \quad B' = 1, \quad A'' = (k_c + k_l)\mu, \quad B'' = (k_b + k_c)\mu k_c$$

y sé tendrá:

$$(10) \qquad x = \frac{x_1 + \dfrac{(k_b + k_l)k_c}{k_c + k_l} x_2}{1 + \dfrac{(k_b + k_l)k_c}{k_c + k_l}}, \quad y = \frac{y_1 + \dfrac{(k_b + k_l)k_c}{k_c + k_l} y_2}{1 + \dfrac{(k_b + k_l)k_c}{k_c + k_l}}$$

para las coordenadas del punto P.

Se vé, pues, que la posición de P depende únicamente de las de A_1, A_2, B, C, L.

Es fácil ver que si se permutan entre sí los puntos A_2 y C o bien A_1 y B se obtiene el mismo punto P.

También es fácil ver que

$$\frac{\dfrac{PC}{PB}}{\dfrac{A_1C}{A_1B}} = \frac{\dfrac{LA}{LA_1}}{\dfrac{BA}{BA_1}}$$

y por consiguiente los puntos P, A_1, B_1 C y L, B, A_2, A_1, están en involución.

Es claro que este teorema y el del párrafo anterior relativo a los puntos conjugados armónicos son casos particulares del de DESARGUES y resultan inmediatamente de la ecuación (5). En efecto, los conjuntos de puntos A_1, P, A_2 y M, N, Q pueden considerarse en los dos casos como formando los triángulos homológicos del teorema de DESARGUES.

4. Teorema de las cuatro esferas.—Como aplicación interesante del método de los coeficientes indeterminados vamos a demostrar el teorema siguiente: *Se marca un punto sobre cada una de las aristas de un tetraedro. Por cada uno de los vértices y los tres puntos situados sobre las aristas que terminan en ese vértice se hace pasar una esfera. Las cuatro esferas así obtenidas tienen un punto común.*

Sean (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ las coordenadas de los vértices del tetraedro con respecto a tres ejes de coordenadas rectangulares.

Designando por m, n, dos vértices cualesquiera del tetraedro, las coordenadas del punto marcado sobre la arista mn que une esos dos vértices, pueden escribirse así:

$$\frac{x_m + \lambda_{mn} x_n}{1 + \lambda_{mn}}, \quad \frac{y_m + \lambda_{mn} y_n}{1 + \lambda_{mn}}, \quad \frac{z_m + \lambda_{mn} z_n}{1 + \lambda_{mn}}.$$

Pongamos para abreviar

$$\theta_{mn} = \frac{\overline{mn}^2}{1 + \lambda_{mn}} \tag{11}$$

conviniendo en que

$$\lambda_{mn} \lambda_{nm} = 1$$

y siendo $\overline{mn}^2$ el cuadrado de la distancia de los puntos m, n.

Si se hace

$$\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

se tendrá que la ecuación de la esfera que pasa por el vértice 1 y por los tres puntos marcados sobre las aristas 12, 13, 14 es:

$$(12) \qquad S_1 \equiv \left| \begin{array}{c|cccc} \sum x^2 & x & y & z & 1 \\ \hline \sum x_1^2 & & & & \\ \sum x_2^2 - \theta_{12} & & & & \\ \sum x_3^2 - \theta_{13} & & & \Delta & \\ \sum x_4^2 - \theta_{14} & & & & \end{array} \right| = 0$$

designando para abreviar por $\Sigma\, x_i^2$ la suma $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Basta permutar circularmente los números 1, 2, 3, 4 para tener las ecuaciones de las esferas que pasan por los vértices 2, 3, 4. Por consiguiente, se deduce que las ecuaciones de los tres planos radicales pueden escribirse así:

$$(13) \qquad S_1 - S_n \equiv \left| \begin{array}{cccc|c} x & y & z & 1 & 0 \\ \hline & & & & \alpha_{1n} \\ & & & & \alpha_{2n} \\ & \Delta & & & \alpha_{3n} \\ & & & & \alpha_{4n} \end{array} \right| = 0 \quad (n = 2, 3, 4)$$

escribiendo abreviadamente

$$(14) \qquad \alpha_{mn} = \theta_{nm} - \theta_{1m} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, 4 \\ n = 2, 3, 4 \end{pmatrix}$$

Se tendrá las coordenadas del centro radical de las cuatro esferas, determinando los valores de x, y, z que hacen idénticamente nulos los tres determinantes (13). Sean

$$A_m \qquad (m = 1, 2, 3, 4)$$

cuatro coeficientes indeterminantes tales que

$$(15) \qquad \sum_{m=1}^{m=4} A_m\, \alpha_{mn} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4)$$

De estas tres ecuaciones (15) se deduce que los A_m son respectivamente proporcionales a los cuatro determinantes deducidos de la matriz.

$$(16) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{matrix} \right\|$$

suprimiendo sucesivamente cada una de las columnas.

Las ecuaciohes (13) serán pues satisfechas por los valores

$$(17) \quad x = \frac{\sum_1^4 A_m x_m}{\sum_1^4 A_m}, \quad y = \frac{\sum_1^4 A_m y_m}{\sum_1^4 A_m}, \quad z = \frac{\sum_1^4 A_m z_m}{\sum_1^4 A_m}$$

que son las coordenadas del centro radical de las cuatro esferas. Ese punto puede considerarse como el centro de gravedad de cuatro masas A_m ($m = 1, 2, 3, 4$) colocadas respectivamente en los vértices del tetraedro.

Es fácil ver que ese punto es común a las cuatro esferas. Basta hacer ver que dicho punto pertenece a la esfera S_1, por ejemplo.

Agreguemos a la primera línea del determinante (12) multiplicada por $-\left(\sum_1^4 A_m\right)^2$ las otras cuatro multiplicadas respectivamente por

$$A_1 \sum_1^4 A_m, \quad A_2 \sum_1^4 A_m, \quad A_3 \sum_1^4 A_m, \quad A_4 \sum_1^4 A_m$$

Se tendrá, según las fórmulas (17) que los cuatro últimos elementos de la 1ª línea del determinante (12), así modificada, son nulos y que el primer elemento es:

$$(18) \qquad \sum_{mn} A_m A_n \overline{mn}^2 + \sum_2^4 A_n \alpha_{mn} \sum_1^4 A_m$$

debiendo tomarse en la primera suma para los índices m, n las combinaciones dos a dos de los números 1, 2, 3, 4 (sin repetición).

Ahora, de la ecuación (11) se deduce:

$$\overline{m\,n}^2 = \theta_{m\,n} + \theta_{n\,m}$$

o, según las ecuaciones (14):

$$\overline{m\,n}^2 = \alpha_{m\,n} + \alpha_{n\,m} - (\alpha_{n\,n} + \alpha_{m\,m})$$

Teniendo en cuenta que $\alpha_{11} = 0$, se tendrá que la expresión (18) equivale a

$$\sum_{m\,n} A_m\, A_n\, (\alpha_{m\,n} + \alpha_{n\,m}) + \sum_{2}^{4} A_n^2\, \alpha_{n\,n}$$

o, puesto que $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{41} = 0$, la anterior podrá escribirse así:

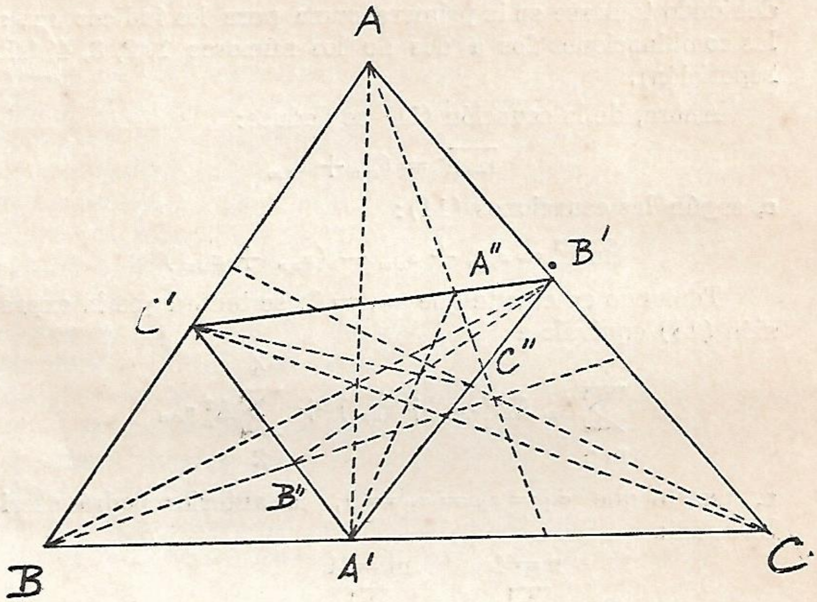
$$\sum_{n=2}^{n=4} A_n \sum_{m=1}^{m=4} A_m\, \alpha_{m\,n}$$

expresión que es idénticamente nula, según las ecuaciones (15). Por consiguiente, el determinante (12) es idénticamente nulo cuando se sustituye en vez de x, y, z los valores [17] y el teorema está demostrado.

Si se hace $z = 0$ y se suprimen los términos que tienen índice 4, se tendrá el teorema análogo relativo al triángulo y a los tres círculos que pasan por cada vértice y los dos puntos marcados sobre los lados que terminan en ese vértice.

5. Como aplicación final del método de los coeficientes indeterminados, vamos a demostrar la proposición siguiente: *Se da un triángulo cualquiera* A B C *y las rectas concurrentes* A A', B B', C C', *Consideremos el triángulo* A' B' C' *y las rectas concurrentes* A', A'', B' B'', C' C''. *Demostrar que las rectas* A A'', B B'', C C'' *son también concurrentes,*

Designemos en un sistema cualquiera de ejes de coordenadas, por (x_i , y_i) $(i = a, b, c)$ las coordenadas de los



vértices A, B, C del triángulo ABC; las de los puntos A', B', C'; A'', B'', C'' podrán representarse así:

$$A' \left(x_{a'} = \frac{x_b + m_1 y_c}{1 + m_1}, \quad y_{a'} = \frac{y_b + m_1 y_c}{1 + m_1} \right);$$

$$A'' \left(x_{a''} = \frac{x_{b'} + n_1 x_{c'}}{1 + n_1}, \quad y_{a''} = \frac{y_{b'} + n_1 y_{c'}}{1 + n_1} \right)$$

$$B' \left(x_{b'} = \frac{x_c + m_2 x_a}{1 + m_2}, \quad y_{b'} = \frac{y_c + m_2 y_a}{1 + m_2} \right);$$

$$B'' \left(x_{b''} = \frac{x_{c'} + n_2 x_{a'}}{1 + n_2}, \quad y_{b''} = \frac{y_{c'} + n_2 y_{a'}}{1 + n_2} \right)$$

$$C' \left(x_{c'} = \frac{x_a + m_3 x_b}{1 + m_3}, \quad y_{c'} = \frac{y_a + m_3 y_b}{1 + m_3} \right);$$

$$C'' \left(x_{c''} = \frac{x_{a'} + n_3 y_{b'}}{1 + n_3}, \quad y_{c''} = \frac{y_{a'} + n_3 y_{b'}}{1 + n_3} \right)$$

Las ecuaciones de las rectas AA'', BB'', CC'' podrán escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ (1+m_3)x_c + n_1 m_3 (1+m_2) x_b & (1+m_3)y_c + n_1 m_3 (1+m_2) y_b & 1+m_3+n_1 m_3 (1+m_2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ (1+m_1)x_a + n_2 m_1 (1+m_3) x_c & (1+m_1)y_a + n_2 m_1 (1+m_3) y_c & 1+m_1+n_2 m_1 (1+m_3) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ (1+m_2)x_b + n_3 m_2 (1+m_1) x_a & (1+m_2)y_b + n_3 m_2 (1+m_1) y_a & 1+m_2+n_3 m_2 (1+m_1) \end{vmatrix} = 0$$

Multipliquemos la 2ª línea de cada uno de estos determinantes por $n_3 m_2 (1+m_1)$; $n_1 m_3 (1+m_2)$ y $n_2 m_1 (1+m_3)$, respectivamente, y ensayemos de determinar coeficientes A, B; A', B'; A'', B'' tales que se tenga:

$$\begin{aligned} & A(1+m_1)n_3 m_2 x_a + B\,(1+m_3)x_c + B\,n_1 m_3 (1+m_2)x_b \\ = \; & A'(1+m_2)n_1 m_3 x_b + B'(1+m_1)x_a + B' n_2 m_1 (1+m_3)x_c \\ = \; & A''(1+m_3)n_2 m_1 x_c + B''(1+m_2)x_b + B'' n_3 m_2 (1+m_1)x_a \end{aligned}$$

Esto exige que se verifiquen las ecuaciones de condición siguientes:

$$A\,n_3 m_2 = B'; \qquad A' = B; \qquad A'' = B'$$

$$A = B''; \qquad B\,n_1 m_3 = B''; \qquad B = B'\,n_2 m_1$$

Pero, se tiene por hipótesis (concurrencia de las rectas A A', B B', C C'; A' A'', B' B'', C' C''):

$$m_1 m_2 m_3 = n_1 n_2 n_3 = -1.$$

Las ecuaciones de condición que preceden son pues compatibles y serán satisfechas si se hace

$$B' = 1, \qquad B = n_2 m_1 \qquad A = m_1 m_3 n_1 n_2 .$$

Se deduce, pues, que los tres determinantes precedentes serán idénticamente nulos si se hace

$$x = \frac{(1+m_1)x_a + (1+m_2)m_1 m_3 n_1 n_2 x_b + (1+m_3)n_2 m_1 x_c}{1+m_1+(1+m_2)m_1 m_3 n_1 n_2 + (1+m_3)n_2 m_1}$$

$$y = \frac{(1+m_1)y_a + (1+m_2)m_1 m_3 n_1 n_2 y_b + (1+m_3)n_2 m_1 y_c}{1+m_1+(1+m_2)m_1 m_3 n_1 n_2 + (1+m_3)n_2 m_1}$$

Las cuestiones aquí tratadas muestran la fecundidad del método de los coeficientes indeterminados aplicado a los determinantes y la gran facilidad de hallar por este método los valores de las incógnitas que hacen idénticamente nulos los determinantes.