SOLUCION GENERAL DE UNA ECUACION DIOFANTICA DE TERCER GRADO

POR F. J. DUARTE

1.—La ecuación de que se trata es la siguiente:

$$(1) \qquad Z^3 - 3XYZ + X^3 + Y^3 = v^3 \qquad (XYZv \neq 0).$$

Lagrange, en sus *Adiciones* al Algebra de Euler (*), ha dado un método para hallar soluciones en números enteros de ecuaciones aún más generales que la (1) y expresa que la solución obtenida es general, de donde podría creerse que el método mencionado suministra todas las soluciones. Como veremos, ésta creencia es errónea.

Simplificando el método de Lagrange en el caso de la ecuación (1) equivale a poner

$$Z + \omega X + \omega^2 Y = (\zeta + \omega\xi + \omega^2 \eta)^3 = A + B\omega + C\omega^2$$

y a cambiar sucesivamente ω por las tres raíces cúbicas de la unidad, 1, ϵ, ϵ^2.

De las ecuaciones así obtenidas, se deduce:

$$Z = A, \;\; X = B, \;\; Y = C$$

y multiplicándolas miembro a miembro, se obtiene

$$(2) \qquad v = \zeta^3 - 3\,\xi\eta\zeta + \xi^3 + \eta^3$$

(*) Euler, *Eléments d'Algèbre,* trad. Lagrange, Lyon, 1795, t. II, p. 640.

y para Z, X, Y resultan los valores:

$$(2')\quad \begin{cases} Z = \zeta^3 + 6\,\xi\eta\zeta + \xi^3 + \eta^3 \\ X = 3\,(\xi^2\eta + \eta^2\zeta + \zeta^2\xi) \\ Y = 3\,(\xi\eta^2 + \eta\zeta^2 + \zeta\xi^2). \end{cases}$$

Las fórmulas (2), (2′) dan infinitas soluciones de la ecuación (1); pero ellas no contienen *todas* las soluciones, en contra de la afirmación de Lagrange, como vamos a demostrarlo con un ejemplo.

Antes, vamos a resolver el problema inverso, es decir, dada una solución Z, X, Y, v, en enteros todos diferentes de cero, hallar los parámetros ξ, η, ζ que suministran esta solución.

Dando valores enteros a los parámetros ξ, η, ζ, se obtendrá una solución entera ρX, ρY, ρZ, ρv, pudiendo ser igual a 1 el entero ρ. De las fórmulas (2), (2′) se deduce inmediatamente:

$$(3)\quad \begin{cases} \rho(X + Y + Z) = (\xi + \eta + \zeta)^3 \\ \dfrac{\rho(X + Y + Z - v)}{3\sqrt[3]{\rho(X + Y + Z)}} = \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi \\ \dfrac{\rho(Z - v)}{9} = \xi\eta\zeta \end{cases}$$

Así, dada una solución en números enteros diferentes de cero, Z, X, Y, v, es posible determinar los parámetros ξ, η, ζ, por medio de una ecuación de tercer grado, como lo muestran las fórmulas (3). Por ejemplo,

$$Z = 340,\ X = 321,\ Y = 339,\ v = 70$$

es una solución de (1); la ecuación de tercer grado para determinar los parámetros, será según las fórmulas (3):

$$t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son 2, 3, 5 valores de los parámetros.

Consideremos ahora la solución de (1)

$$Z = 16, \quad X = 18, \quad Y = 15, \quad v = 7.$$

Es preciso tomar $\rho = 7$ a fin de que $\rho(X + Y + Z)$ sea un cubo; se tendrá la ecuación de tercer grado:

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 7 = 0$$

Esta ecuación no puede tener raíces enteras, porque todos los coeficientes excepto el de t^3 son divisibles por 7 y el término independiente de la incógnita no es divisible por 49 (teorema de Eisenstein) o, más sencillamente porque ni 1 ni 7 son raíces de la ecuación. Si se resuelve esta ecuación puesta en la forma

$$u^3 - 21\,u + 7 = 0$$

mediante la sustitución $t = \frac{1}{3}(u + 7)$ se obtienen los valores irracionales de los parámetros

$$\xi = 3{,}80193\ldots, \quad \eta = 2{,}44504\ldots, \quad \zeta = 0{,}75302\ldots, \; (*)$$

Estos valores sustituidos en las fórmulas (2), (2′) reproducen los valores dados de X, Y, Z, v, multiplicados por $\rho = 7$.

Se ve, pues, por este sólo ejemplo que las fórmulas (2), (2′) no contienen *todas* las soluciones de (1) y que, en general, el método de Lagrange no conduce a la solución *general*.

2.—Propongámonos ahora hallar un sistema de fórmulas que suministren *todas* las soluciones de la ecuación (1). Para esto pongamos

$$X = g + h, \quad Y = g + k, \quad Z = g - h - k$$

Designando por $\varphi(X, Y, Z)$ el primer miembro de (1) se tendrá:

(*) *Tablas para la resolución de las ecuaciones cúbicas* por A. Zavrotsky, Caracas, 1945, pp. 98-99.

$$\varphi(X, Y, Z) = (X+Y+Z)\left[X(X-Y)+Y(Y-Z)+Z(Z-X)\right]$$

$$= 9g(h^2+hk+k^2) = 9g\left[3\left(\frac{h+k}{2}\right)^2+\left(\frac{h-k}{2}\right)^2\right]$$

o, poniendo $h + k = 2a$, $h - k = 6b$, vendrá:

$$\varphi(X, Y, Z) = 27g\ (a^2 + 3b^2)$$

y el segundo miembro será un cubo si se toma

$$g = (a^2 + 3b^2)^2$$

Resulta pues:

$$(4)\ \begin{cases} X = (a^2 + 3b^2)^2 + (a + 3b)\ c^3 \\ Y = (a^2 + 3b^2)^2 + (a - 3b)\ c^3 \\ Z = (a^2 + 3b^2)^2 - 2ac^3 \\ v = 3\ (a^2 + 3b^2)\ c^2 \end{cases}$$

introduciendo el parámetro c para la homogeneidad de las fórmulas, es decir, sustituyendo

$$a, b \text{ por } \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$$

y multiplicando luego los cuatro valores por c^4.

Es fácil ver que estas fórmulas suministran todas las soluciones. En efecto, se deduce inmediatamente

$$\frac{a}{b} = \frac{2Z - (X + Y)}{Y - X}$$

y reduciendo la fracción del segundo miembro a su más simple expresión, $\frac{\alpha}{\beta}$, se tomará $a = \alpha$, $b = \beta$. Por otra parte, se deduce

$$c = \frac{X - Z}{v}\ \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{\alpha + \beta}$$

y si la fracción del segundo miembro reducida a su más simple expresión es $\frac{\gamma}{\delta}$, se tendrá para valores enteros de los parámetros con máximo común divisor 1, los siguientes:

$$a = \alpha\delta, \quad b = \beta\delta, \quad c = \gamma$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (4) se obtendrá la solución dada o bien ρX, ρY, ρZ, ρv, siendo ρ entero. Lo que demuestra que las fórmulas (4) contienen todas las soluciones de (1) cuando $XYZv \neq 0$.

Por ejemplo, para la solución

$$Z = 340, \quad X = 321. \quad Y = 339, \quad v = 70,$$

resulta

$$\alpha = 10, \quad \beta = 9, \quad c = -\frac{49}{10}$$

y se tendrá

$$a = 100, \quad b = 90, \quad c = -49.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (4) se obtienen los números de la solución dada multiplicados por

$$\rho = 2 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7^6.$$

Para la otra solución ya mencionada

$$Z = 16, \quad X = 18, \quad Y = 15, \quad v = 7,$$

se obtendrá

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 2$$

y esto s valores sustituidos en las fórmulas (4) reproducen los valores dados de Z, X, Y, v multiplicados por $\rho = 2^4 . 3$.