REPLICA AL ESTUDIO "EL POSTULADO DE EUCLIDES" DEL SEÑOR HERNANDO LLERAS FRANCO

POR F. J. DUARTE

I. — En el año de 1945 publiqué en el Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Caracas (t. IX, Nº 26, 1945, p. 3-67) un estudio intitulado "Sobre las Geometrías no euclidianas. Notas históricas y bibliográficas".

Tuve el honor de que ese estudio fuera íntegramente reproducido — excepto, sin embargo, el epígrafe y los retratos — en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (vol. VII, Nº 25-26, Bogotá, diciembre de 1946), a petición de su digno Presidente y Director de la Revista, doctor Jorge Alvarez Lleras. Al pié de la reproducción hizo el doctor Alvarez Lleras ciertas consideraciones críticas que podrán leerse en la Nota I al final de la presente Réplica.

Recibí el volumen VII, Nº 25-26 de la Revista de la Academia Colombiana a principios de abril de 1947 y al enterarme de la crítica que hacía a mi trabajo el doctor Alvarez Lleras, le dirigí una carta que no fué publicada entonces; puede vérsela en la Nota II. Por otra parte, el doctor Alvarez Lleras nunca publicó la refutación que había ofrecido en las consideraciones ya mencionadas.

Pasados casi cuatro años, la Revista de la Academia Colombiana (vol. VIII, Nº 29, Bogotá, noviembre de 1950), llegada a Caracas a fines de enero de 1951, inserta un trabajo del señor Hernando Lleras Franco, cuyo título aparece en el encabezamiento de esta Réplica. Como el único fin del señor Lleras Franco es tratar de refutar mi estudio ya mencionado, me veo en el caso de refutarlo a mi vez, ya que considero absolutamente sin ningún valor los argumentos de que se vale y debo, además, destruir afirmaciones inexactas que me atribuye.

Advierte previamente el señor Lleras Franco que emite conceptos netamente personales en lo que se refiere a valores infinitos que lindan, dice, con el campo de la Filosofía. En realidad, no sé qué papel desempeñe la Filosofía en la idea muy curiosa que tiene del infinito el señor Lleras Franco. Pero, lo cierto es que, en lo que respecta a la Matemática los conceptos del señor Lleras Franco son absolutamente inaceptables y los razonamientos que emplea carecen, en general, del rigor y de la precisión que se exigen en esa ciencia.

Cree, por ejemplo, el señor Lleras Franco que un punto tomado sobre una rama de parábola divide la curva en dos ramas infinitas desiguales, las que serían iguales si el punto fuera el vértice. Es decir, el señor Lleras Franco considera infinitos geométricos de *largos diferentes*. También dice el señor Lleras Franco que "un paraboloide divide el espacio en dos porciones infinitas desiguales". Hace luego el señor Lleras Franco singulares consideraciones sobre los ángulos y dice que "no obstante ser infinitos los ángulos son proporcionales a cantidades finitas como son los arcos de circunferencias trazados con el vértice como centro e igual radio". Empleando la terminología "mitad del plano" en vez de decir dos ángulos rectos, el señor Lleras Franco piensa haber hallado una nueva demostración de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

Por último, el señor Lleras Franco modifica a su antojo el conocido inaceptable ensayo de demostración del postulado de Euclides de Bertrand (siglo XVIII) y llega a la conclusión absurda de que el área comprendida entre dos rectas paralelas indefinidamente prolongadas es nula. Dice textualmente:

> "Llegamos así a una conclusión de apariencia paradójica, y es que la parte de plano comprendida entre dos rectas paralelas, siendo infinita, tiene valor cero".

Para justificar sus extravagantes interpretaciones del infinito, el señor Lleras Franco aduce que en el Cálculo infinitesimal se emplean infinitésimos, pero parece olvidar que allí figuran con el concepto preciso de límites de relaciones.

Podrían llenarse varias páginas señalando los errores del señor Lleras Franco al tratar con tanto desenfado la idea de infinito en Matemáticas.... Pero creo que es más que suficiente lo expuesto y paso ahora a analizar lo que escribe el señor Lleras Franco acerca de los proyectos de demostración del postulado de Euclides publicados por Garavito.

II. — Dice textualmente el señor Lleras Franco al referirse al postulado de Euclides, lo siguiente:

> "Hay dos demostraciones dadas por nuestro gran sabio Garavito que son irrefutables".

Pero el señor Lleras Franco se limita a hacer sentimentalmente esta afirmación dogmática sin intentar siquiera presentar pruebas de la exactitud de las supuestas demostraciones. Pero esto sería imposible: he demostrado, en efecto, con toda claridad y con todo el rigor que se exige en la Matemática moderna, que los ensayos de demostración de Garavito son simples peticiones de principio. Basta para convencerse, consultar la Revista de la Academia de Ciencias de Bogotá o el Boletín de la de Caracas donde fué publicado mi estudio. Sería muy largo e innecesario repetir aquí las demostraciones completas. Pero juzgo indispensable esclarecer lo que el señor Lleras Franco pretende atribuirme erróneamente.

En una discusión cualquiera es grave falta atribuir al adversario lo que no ha expresado o tratar de tergiversar sus conceptos para pretender ganar puntos en el debate.

Entremos en materia, resumiendo en pocas palabras mi demostración. En su primer ensayo de demostración, Garavito considera un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es variable, y compara éste con la tangente del ángulo opuesto. Expresa luego que la relación que liga estas magnitudes variables es un polinomio de primer grado por relación a cada una de ellas separadamente. Ahora bien, es sabido que cuando la relación es de esta forma, ella es algebraica. Mas, en el caso actual eso no podría suponerse a priori sin admitir previamente el postulado de Euclides. Ahora, como Garavito expresa dicha relación por el polinomio mencionado, *admite tácitamente* que ella es algebraica. Por tanto, se fundó sin darse cuenta en el célebre postulado y cayó así forzosamente en círculo vicioso. Su pretendida demostración es, pues, absolutamente nula.

A este razonamiento replica el señor Lleras Franco así:

> "Es natural que Garavito al hacer una demostración, reduzca implícitamente o explícitamente, una proposición a otras admitidas como verdaderas; esto sucede en cualquier demostración, y no es acertado negar a priori la proposición de que en un triángulo rectángulo un cateto y la tangente del ángulo opuesto están ligados por una relación algebraica; esto lo sabemos por la definición misma de lo que se llama tangente de un ángulo".

La respuesta, en la cual me veo obligado a repetir en otra forma lo que ya he expuesto, es la siguiente: el señor Lleras Franco se sale de la cuestión: nadie niega que toda demostración depende necesariamente de otras proposiciones ya conocidas. Pero, si una de estas proposiciones es equivalente a la que se quiere demostrar y no se la puede establecer sin fundarse en esta última, hay entonces círculo vicioso. Ahora, la relación entre un cateto de un triángulo rectángulo y la tangente del ángulo opuesto, no puede establecerse sin basarse en el postulado de Euclides. Esto se halla en cualquier tratado de Trigonometría. Nadie niega que tal relación es algebraica. Luego, si se supone de antemano que ella es algebraica, como lo hace Garavito, se admite implícitamente el postulado de Euclides. Por tanto, petición de principio y demostración nula.

Dice luego el señor Lleras Franco:

> "¿Acaso Lobatchewsky ha demostrado en alguna parte que en un plano, por un punto fuera de una recta, se pueden trazar dos o más rectas no secantes? En lo que yo conozco no se encuentra esa demostración".

Respuesta: No, de ninguna manera: Lobatchewsky no ha demostrado nunca lo que pregunta el señor Lleras Franco y jamás encontrará en ninguna parte tal demostración el señor Lleras Franco. ¿Por qué? Es demasiado sencillo: porque ni el postulado de Euclides, ni el de Lobatchewsky, ni el de Riemann pueden demostrarse. No son proposiciones, ni tampoco axiomas; son postulados. La confusión del señor Lleras Francos proviene de creer que el postulado de Euclides es demostrable.

Dice el señor Lleras Franco:

> "¿O será que el doctor Duarte ha logrado demostrar que la relación que liga la tangente de un ángulo con el cateto opuesto en un triángulo rectángulo no es algebraica? En el importante estudio ya citado *supone* que no sea algebraica pero no lo demuestra".

Respuesta: No, de ninguna manera: nadie podría demostrar que esa relación no es algebraica, porque ella ES ALGEBRAICA. Si el señor Lleras Francos hubiera leído mi trabajo, habría visto que allí demuestro que esa relación es *trascendente* en la geometría de Lobatchewsky y en la de Riemann, pero que es *algebraica* en el sistema euclidiano. Por esto precisamente, es que al *suponer* Garavito que ella es algebraica, su *demostración* se desbarata como castillo de naipes porque cae en petición de principio. Por consiguiente, es de todo punto inexacto lo que asienta el señor Lleras Franco: que yo *supongo* que dicha relación no es algebraica.

III. — Vamos ahora a tratar de la segunda pseudodemostración del postulado de Euclides publicada por Garavito. Consiste ella en llamar *recta* a una ecuación de primer grado con dos variables, basándose en que esta ecuación representa una línea recta en Geometría analítica. Dice el señor Lleras Franco:

> "El mismo Garavito al hablar de que "solamente se ha referido al *Algebra pura y que las variables no son coordenadas sino simples cantidades numéricas*" indica claramente que no se trata de un problema geométrico y por tanto no es el caso de anotarle petición de principio o círculo vicioso".

Respuesta: Entonces, si no se trata de *problema geométrico,* Garavito ha repetido únicamente lo que sabe todo estudiante de Algebra elemental, a saber: que dos ecuaciones de primer grado con dos variables son incompatibles (esto es, tienen soluciones infinitas o indeterminadas) cuando el determinante de los coeficientes de las incógnitas es nulo. Pero esto nada tiene que ver con la teoría de las paralelas, a menos que se haga *corresponder,* como se enseña en Geometría analítica, a la noción de recta la de ecuación de primer grado entre dos variables y recíprocamente. En ese caso, a la incompatibilidad de las ecuaciones corresponde el paralelismo (o la coincidencia) de las rectas y recíprocamente. Lo que sucede es que para establecer esa *correspondencia* hay que basarse en el postulado de Euclides. De aquí, *círculo vicioso* y la segunda "demostración" de Garavito es también nula.

Por otra parte, es muy curioso que una cosa tan conocida como es la discusión de las ecuaciones de primer grado con dos o un número cualquiera de variables, la que se halla en todos los tratados de Geometría analítica, se haga aparecer como un "descubrimiento" de Garavito y es verdaderamente extraordinario que él mismo haya creído haber demostrado así el postulado de Euclides.

Dice luego el señor Lleras Franco:

> "En realidad lo que sucede es que rechazar el Postulado significaría derrumbar el sólido edificio de la Geometría Analítica y del Cálculo Infinitesimal que utilizan ese lenguaje (geométrico) convencional...."

Respuesta: El Cálculo infinitesimal nada tiene que hacer con el postulado de Euclides. La Geometría analítica y las aplicaciones geométricas del Cálculo, que forman parte de la Geometría analítica, se fecundizan y se fortalecen con las nuevas geometrías. Así, no hay ningún temor de que pueda derrumbarse el edificio.

En cuanto a la conclusión del estudio de Garavito que, según el señor Lleras Franco yo no rechazo ni comento, diré que está rechazada y comentada en todo el cuerpo de mi estudio, pues allí trato de las representaciones de las geometrías no euclidianas sobre las superficies de curvatura positiva y negativa, respectivamente. He aquí esa conclusión de Garavito:

> "El error consiste en designar con los nombres de geometrías planas no Euclideas a las geometrías esféricas y en poner en duda el Postulado de Euclides".

La respuesta, muy sencilla, es que el postulado de

Euclides no es, como pretende Garavito, una *propiedad característica o exclusiva* de la recta y del plano.

Dice el señor Lleras Franco:

> "En mi concepto, nuestro sabio Garavito, tal vez sin pretenderlo, hizo dos demostraciones rigurosas e irreprochables del Postulado de Euclides...."

Esto es verdaderamente muy difícil de entender, pues las demostraciones no se encuentran casualmente. Parece que el señor Lleras Franco quisiera salvar la reputación científica de Garavito librándolo de haberse dedicado especialmente a demostrar el Postulado, pero que, sin querer, por azar llegó a esas "demostraciones" que el señor Lleras Franco no vacila, sin embargo, en calificar de "rigurosas e irreprochables". Repetimos que son simples círculos viciosos, por consiguiente sin ningún valor científico.

Hace luego el señor Lleras Franco las siguientes afirmaciones dogmáticas:

> "El Postulado de Euclides es cierto aun cuando grandes mentalidades no lo admitan, o no quieran admitir su demostración. Para otras grandes mentalidades no menores en autoridad y prestigio el postulado es cierto axiomáticamente o tiene demostración valedera...."

Hay sin duda error de expresión en estos conceptos del señor Lleras Franco, pues tratándose de un *postulado,* los adjetivos *cierto* o *incierto* no tienen sentido, no pueden aplicarse, y siendo indemostrable no puede hablarse de "admitir" o no su *demostración.* Por otra parte, esa *cortadura* de las *grandes mentalidades* en dos clases, a saber: "partidarios" y "adversarios" de la "demostración" del postulado de Euclides, no existe sino en la imaginación del señor Lleras Franco. En efecto, él no podría citar el nombre de *un solo matemático* que se ocupara hoy día de la demostración del postulado de Euclides. Hablo, por supuesto, de matemáticos y no de ciertos "aficionados" que buscan aún resolver la cuadratura del círculo o la trisección del arco.

IV. — El señor Lleras Franco termina su estudio sobre el postulado de Euclides con un argumento que puede calificarse por lo menos de desafortunado. Dice que, si se negara alguno de los postulados que sirven de base al Algebra clásica, así como se hace en Geometría con el postulado de Euclides, se crearían álgebras diferentes de aquella pero "carentes de significado". He aquí el ejemplo que presenta el señor Lleras Franco:

> "Si se pone en duda el principio fundamental de que *a* más *a* es igual a $2a$ y así como Lobatchewsky introduce el ángulo del paralelismo, se introduce el módulo o parámetro de igualdad, se supone que *a* más *a* sea igual a $2a$ más *k*, siendo *k* un valor que varía según el tamaño de *a*. . . ., se hace la creación de Algebras no Clásicas. . . ."

Respuesta: El ejemplo escogido no prueba nada. En efecto, es inexacto que en Algebra "*a* más *a* igual $2a$" sea un "principio fundamental". Se trata simplemente de una *notación* que se reduce en todos los casos a esto: cuando se añade al número 1 el mismo número, se ha convenido en representar el número que así resulta por el símbolo 2. En el ejemplo del señor Lleras Franco, ya el símbolo no sería 2 y podría representarse, digamos por la letra griega *beta* y el símbolo 2 dejaría de tener el significado usual. Esto no tiene ninguna importancia en Matemáticas: con tal de conservar esta *convención*, no se hallaría ninguna contradicción en los cálculos. Pero salta a la vista que así no se hallaría nada nuevo, nada útil; es una idea infecunda, completamente estéril. En cambio, voy a citar ejemplos de "álgebras no clásicas" o, con más propiedad diferentes de la usual, que son en extremo fecundas e importantes, las cuales resultan de negar alguno de los postulados de base. Por ejemplo, en el álgebra de los cuaterniones *no se verifica la ley conmutativa en la multiplicación* y ningún matemático ignora su fecundidad y sus numerosas aplicaciones en Geometría, en Mecánica, en Física. Lo mismo puede decirse del Algebra vectorial general cuando se trata de multiplicación vectorial.

Otro ejemplo se tiene en el Algebra de las matrices, de Cayley y Hermite. En ella tampoco se conserva, en general, la ley conmutativa y así, el producto de la matriz A por la matriz B no es siempre el mismo que el de B por A. También es una teoría fecunda en aplicaciones a la Física moderna.

También se ha admitido el principio de que un producto puede ser nulo sin que lo sea ninguno de sus factores, contradiciendo así lo que sucede en el Algebra usual y en la de cuaterniones. Esto conduce a los números alternados de Grassmann, teoría notable que permite expresar todo determinante como producto de varios factores.

Finalmente, se puede citar el Algebra abstracta, disciplina matemática muy reciente, uno de cuyos problemas fundamentales es el de hallar todos los dominios en los cuales es válida determinada teoría; por ejemplo, todos los cuerpos en que se verifica la teoría de Galois. El Algebra abstracta tiene importantes relaciones con la Geometría y la Topología.

Se ve, pues, en contra de lo que cree el señor Lleras Franco, que sí *existen* efectivamente muchas álgebras fecundas e importantes y no "carentes de significado", así como existen muchas geometrías, además de las de Euclides, de Lobatchewsky y de Riemann. El argumento del señor Lleras Franco prueba, pues, todo lo contrario de lo que él pretendió probar.

Pongo aquí punto final. No hay ningún interés en seguir discutiendo cosas que hoy día ningún matemático pone en duda. Concedo desde luego al señor Lleras Franco el derecho de pensar en estas materias como a bien tenga. Pero, es necesario no olvidar que la libertad de pensamiento tiene límites muy precisos en la ciencia matemática: los del culto y el respeto de la verdad, sin lo cual no hay Matemática posible.

Caracas, 8 de febrero de 1951.

NOTA I

(De la "Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales", Vol. VII, Nº 25-26, Bogotá, 1946)

NOTA DE LA DIRECCIÓN. — Hemos reproducido íntegramente este folleto del doctor F. J. Duarte, publicado en Caracas en 1945, porque fuera de su gran mérito intrínseco contiene él algunas apreciaciones contrarias a Garavito, y en estas páginas deben tener cabida opiniones de toda clase, aunque nos sean adversas. Tal reproducción es enteramente espontánea: nadie nos ha sugerido el hacerla, ni el propio autor del folleto, quien accedió a nuestros deseos por sentimientos de simpatía hacia la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, a la cual pertenece con el título de Miembro Correspondiente.

Al suministrar a nuestros lectores la copia atrás presentada, y que hemos verificado con nimio cuidado, nos permitimos recomendar su lectura por considerar que el estudio: "Notas históricas y bibliográficas sobre las Geometrías no euclidianas" es digno de la más grande atención. Su autor se muestra en este escrito como erudito de primera clase. Tal vez no se haya hecho nunca un trabajo limitado y abreviado sobre la materia con tal cantidad de información, que supone un espíritu benedictino de investigación y conocimientos matemáticos muy poco comunes. Merece por ello nuestro colega las más sinceras felicitaciones.

Pero si hemos puesto en la reproducción a que aludimos, el mayor cariño, obedeciendo a un sincero deseo de que sea este estudio ampliamente conocido y de que nuestros lectores sepan cuál es la crítica que el doctor Duarte endereza contra las opiniones de Garavito respecto de las Geometrías no euclidianas, esto no obsta para que nos reservemos para algún otro lugar en donde podamos, con mayor espacio, refutar tal crítica.

Por lo pronto, muy respetuosamente observamos al doctor Duarte que nunca hemos entendido que Garavito se hubiera propuesto demostrar el Postulado de Euclides. Bien sabía él cuál concepto filosófico debe tenerse de esta verdad intuitiva que al tratar de demostrarse presupone siempre definiciones implícitas que también necesitan demostración.

Porque Garavito, más que matemático, fué filósofo sincero que nunca tuvo en mira cosa diferente de la persecución de la verdad. Bien puede catalogársele entre los filósofos de que nos habla el doctor Duarte, cuando afirma en su escrito: "Los filósofos que no son matemáticos, como Lotze, han sido en general, enemigos acérrimos de la Metageometría. Lotze expresaba la esperanza de que la Filosofía no se dejara dominar en esta materia por las Matemáticas".

Garavito, al igual de Lotze, fué adverso a las Geometrías no euclidianas, por concepto propio y no por principio de autoridad, ya que su conocimiento de los numerosísimos autores que han propugnado por el triunfo de las nuevas ideas geométricas, era muy limitado.

Nuestra ignorancia a este respecto, mucho mayor que la suya, nos ha hecho comprenderle por este aspecto y por eso podemos afirmar que el Profesor colombiano jamás hubo de preocuparse de la demostración del Postulado de Euclides.

Así procuraremos demostrarlo en un próximo número de esta Revista, en donde haremos ver que los errores que el doctor Duarte cree encontrar en las exposiciones de Garavito, no lo son para todos, por cuanto la escuela de los pangeómetras no es universal, ni las ideas contrarias a la matemática clásica han obtenido hasta ahora un triunfo absoluto. El antagonismo existente entre clásicos e innovadores en estas materias es, en nuestro pobre concepto, cuestión de temperamentos. El hablar del error en que están quienes no piensan como nosotros, sobre cuestiones que aún se discuten, es pronunciar fallos ex-cátedra.

Por pensar así es que hemos procurado insertar en estas páginas los conceptos tan bien documentados del doctor Duarte, con el propósito de discutirlos de acuerdo con las doctrinas de nuestro venerado maestro, a quien seguimos con sincera convicción. Creemos con ello prestar un servicio a quienes se interesen por el serio estudio y gusten de la discusión serena y constructiva.

Que nuestro colega, quien, repetimos nos merece profundo respeto e irrestricta admiración, nos perdone esta explicación y acepte por anticipado la réplica que habremos de hacer próximamente con más estudio y mayor conocimiento del asunto, como prueba de que el trabajo a que nos referimos es digno, como ninguno, de la consideración de los estudiosos.

NOTA II

Caracas, 28 de abril de 1947.

Señor Dr. Jorge Alvarez Lleras, Presidente de la Academia de Ciencias.

Bogotá.

Mi distinguido colega y amigo:

Ante todo le doy muy expresivas gracias por la inserción en la "Revista de la Academia Colombiana de

Ciencias Exactas, Físicas y Naturales", Vol. VII, Nº 25-26, del estudio que publiqué sobre las Geometrías no euclidianas.

También agradezco a usted los conceptos que, acerca de este trabajo, expone en la Nota editorial que lo acompaña. Pero, en esa nota emite ciertos comentarios y afirmaciones que no puedo aceptar.

En primer lugar, dice usted que entiende que Garavito no se propuso demostrar el postulado de Euclides. Me parece que afirmar esto es negar la evidencia. Basta, en efecto, leer la "Nota sobre las Geometrías planas no euclideas" de Garavito, para convencerse de que dió dos demostraciones, desde luego falsas, del célebre postulado. Es más, no es necesario leer la nota entera, basta leer lo siguiente:

"Muchos buenos espíritus, sea por haberse dado cuenta de que el Postulado de Euclides no venía a ser sino una condición de incompatibilidad de ecuaciones de primer grado, como lo veremos después, sea por intuición directa, creyeron posible deducir el citado principio como consecuencia de que dos rectas no pueden tener sino un solo punto común sin confundirse en toda su extensión. Sus tentativas no podían tener éxito pues emplearon el método usual de la geometría pura, en el cual no es posible distinguir cuándo las rayas y el papel representan rectas en un plano y cuándo son circunferencias de círculos máximos sobre la esfera real o imaginaria y el postulado siendo como es propiedad exclusiva de la recta no podía deducirse como consecuencia lógica de raciocinios aplicables a especies distintas de líneas y superficies".

...."la teoría de las variables complejas de Cauchy permite estudiar las funciones circulares y las hiperbólicas independientemente de toda consideración geométrica".

Es decir, Garavito conviene en que es imposible demostrar el postulado empleando métodos de Geometría pura, pero cree que sí es posible hacerlo valiéndose de la teoría analítica de las funciones circulares, independiente de la Geometría, y la prueba de esto es que establece así su demostración analítica del postulado, demostración que probé de modo riguroso ser falsa.

En el mismo párrafo transcrito está ya esbozada la otra demostración fundada en la incompatibilidad de ecuaciones de primer grado, menos original que la demostración fundada en las funciones circulares. Por otra parte, es muy interesante notar que Garavito afirma dos veces en su estudio que el postulado de Euclides "es propiedad exclusiva de la línea recta".

Dice usted que Garavito más que matemático fué filósofo y que puede catalogársele entre los filósofos que como Lotze negaron la existencia de las geometrías no euclidianas. Pero debo decirle que, al citar a Lotze lo que quise expresar es que no puede haber contradicción entre Filosofía y Matemáticas. Lotze encontraba esta contradicción precisamente porque no era matemático y por eso cité en seguida a Russell que sí es matemático.

En cuanto a que "la escuela de pangeómetras no es universal", desearía yo que usted me citara un solo *matemático* de cualquier lugar del mundo que niegue hoy día la existencia de las geometrías no euclidianas.

No comprendo tampoco lo que usted llama "ideas contrarias a la Matemática clásica" cuando dice que "esas ideas no han obtenido hasta ahora un triunfo exclusivo". A mi ver, no existen ni pueden existir en Matemáticas ideas contrarias a la ciencia clásica. Lo que sucede es que la Matemática no es, ni puede ser, una ciencia muerta y por esto se renueva constantemente, pero sus nuevas conquistas no pueden nunca estar en contradicción con las anteriores. Hablo de la ciencia pura y no de las teorías físicas, en las cuales convengo en que pueda existir disparidad de criterios.

Por todo esto, considero absolutamente imposible que usted pueda probarme que Garavito no erró al tratar de demostrar el postulado de Euclides y cualesquiera que sean los argumentos que usted presente los espero sin ningún temor, pues pretendo estar en la seguridad de poderlos rebatir.

En honor de Garavito, creo que si le hubiera tocado vivir unos años más habría rectificado sus ideas y aceptado que había caído en error al pretender demostrar el postulado de Euclides. Opino que no se defiende la memoria de este eminente colombiano empecinándose en sostener con sofismas los errores en que incurrió de buena fe.

Con toda consideración y aprecio soy de usted atto. s. s. y amigo,

F. J. Duarte.