Luego en este caso,

$$H_1 = 0^m,78112\left(\frac{163}{40}\right).$$

Tomando esta altura por unidad, si dividimos por ella el valor de la fórmula (22), tendremos:

$$z = \frac{40}{163}\left(i^3 \cos^2 v + 3\,i'^3 \cos^2 v'\right);$$

en la que el valor de z indica qué proporción de la marea unitaria de un determinado puerto, es una marea zizigia cualquiera que se observe en aquel mismo puerto. Este valor de z es el *coeficience de marea*, y la marea unitaria es lo que antes hemos venido llamando *unidad de puerto*, la cual, como se ha dicho, es, en el puerto de que se trate, la altura que tomarían las aguas sobre su nivel medio, en una marea zizigia si el Sol y la Luna estuviesen en sus distancias medias y sobre ó en proximidad del plano del Ecuador. Se ha visto también que esta marea, de condiciones tan excepcionales, puede deducirse, en cada puerto, de la observación de cualquier marea zizigia.

[*Continuará*].

Notas matemáticas

POR EL DOCTOR FRANCISCO JOSE DUARTE,

Individuo de Número de la Academia

Sobre el cálculo de un determinante especial

El determinante de que se trata es el siguiente [*]:

[*] Cuestión propuesta en *L'Intermédiaire des Math*, t. III, 2e. série, 1924, p. 27.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x+1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x+2 & -x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x+3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+n & -x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-n+1 \end{vmatrix}$$

Este determinante puede escribirse así:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x+1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x+2 & -x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x+3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+n & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si se agrega a cada línea la suma de todas las siguientes, se tendrá:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ -1 & x+1 & 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ 0 & -1 & x+2 & 3 & \dots & n & 1 \\ 0 & 0 & -1 & x+3 & \dots & n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si se hace:

$$\sigma_{r+1} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \dots & r \\ -1 & x+1 & 2 & \dots & r \\ 0 & -1 & x+2 & \dots & r \\ 0 & 0 & -1 & \dots & r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+r \end{vmatrix}$$

se tendrá:

$$\triangle_{n+1} = \triangle_n + \sigma_{n+1}$$

y, por consiguiente, se deduce:

$$\triangle_{n+1} = x + 1 + \sum_{r=1}^{n} \sigma_{r+1}$$

Ahora, se puede escribir

$$\sigma_{r+1} = A + A_r x + A_{r-1} x^2 + \dots + A_1 x^r + x^{r+1}$$

designando por A_s la suma de los menores principales de orden s del determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r-1 & r \\ -1 & 1 & 2 & \dots & r-1 & r \\ 0 & -1 & 2 & \dots & r-1 & r \\ 0 & 0 & -1 & \dots & r-1 & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & r \end{vmatrix}$$

Se puede también considerar el determinante σ_{r+1}, al cálculo del cual se reduce el propuesto, como un caso particular del determinante siguiente:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} + x + 1 & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + x + 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

estudiado por Capelli (*Rendiconti Acad. Sci. di Napoli*, 2, III, p. 58-63, 1889).

Si se hace

$$X_r = x\,(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+r-2)\,(x+r-1)$$

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}+1 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}+2 \end{vmatrix} + \ldots$$

....

se tendrá:

$$\triangle = X_n + A_1 X_{n-1} + \ldots + A_{n-1} X_1 + A_n$$

(Véase Muir, *The Thery of Determinants*, t. IV, p. 476, 1923).

Sobre la congruencia

$$x^n + y^n \equiv z^n \quad (\text{mód. } p).$$

Se sabe que la ecuación

$$(1) \quad x^s + y^s = z^s$$

admite infinitas soluciones en números enteros primos entre sí, si $s = 1$ ó $s = 2$. De este ecuación pueden deducirse congruencias de la misma forma. Sea en efecto, n un entero arbitrario cuyo valor será fijado ulteriormente. La ecuación (1) puede escribirse así:

$$x^s\,(x^{n-s} - 1) + y^s\,(y^{n-s} - 1) - z^s\,(s^{n-s} - 1) - (x^n + y^n - z^n) = 0\,.$$

Si se escoge n de modo que

$$n = s + p - 1\,,$$

siendo p un número primo que no dividida al producto xyz, se tendrá:

$$(2) \qquad x^p + y^p \equiv z^p \qquad (\text{mód. } p)$$

si x, y, z son soluciones (primitivas) de

$$x + y = z$$

o, bien:

$$(3) \qquad x^{p+1} + y^{p+1} \equiv z^{p+1} \qquad (\text{mód. } p)$$

si x, y, z verifican la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

La ecuación (1) puede escribirse también en la forma siguiente:

$$x^{-n}(n^{n+s}-1) + y^{-n}(y^{n+s}-1)$$
$$- z^{-n}(z^{n+s}-1) + x^{-n} + y^{-n} - z^{-n} = 0$$

Si se elige n de modo que $n + s + 1$ sea un número primo p no divisor del producto xyz (se supone x, y, z primos entre sí dos a dos), se tendrá cuando x, y, z son soluciones de

$$x + y = z,$$

$$(4) \qquad (yz)^{p-2} + (xz)^{p-2} \equiv (xy)^{p-2} \qquad (\text{mód. } p)$$

y, cuando $x, y, z,$ son soluciones de

$$x^2 + y^2 = z^2$$

se tendra:

$$(yz)^{p-3} + (xz)^{p-3} \equiv (xy)^{p-3} \qquad (\text{mód. } p).$$

Se tendrá un aplicación interesante de (4) tomando $x = 1$, $y = a - 1$, $z = a$, siendo a entero y a y $a - 1$ no divisibles por p.

Se obtiene así:

$$(6) \qquad (a^{p-2} - 1)\,[(a-1)^{p-2} + 1] + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mód. } p).$$

Por ejemplo, se puede afirmar que el número

$$\frac{1 + (1 + 9\,999\,999\,999^{99989})\,(10^{999890} - 1)}{99991}$$

que es *incalculable*, prácticamente hablando, pues su expresión en el sistema decimal contendría cerca de *dos millones de cifras,* es un número entero.

Sobre la expresión de las derivadas de log. f(x) en función de $D_i = \frac{f^{(i)}(x)}{f(x)}$

Si se hace para abreviar

$$\log f(x) = \phi(x) ,$$

se tendrá:

$$f \frac{d\phi}{dx} = f'$$

y se hallará sucesivamente:

$$\frac{d\phi}{dx} = D_1$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + D_1 \frac{d\phi}{dx} = D_2$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} + 2 D_1 \frac{d^2\phi}{dx^2} + D_2 \frac{d\phi}{dx} = D_3$$

. . . .

En general, se podrá escribir simbólicamente:

$$\left(\frac{d}{dx} + D\right)^{n-1} \cdot \frac{d\phi}{dx} = D_n$$

conviniendo en escribir

$$\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^r\phi}{dx^r}$$

y

$$D^r = D_r$$

y se podrá así calcular sucesivamente los valores de las derivadas de log f (x) en función de las relaciones D. Pero las mismas ecuaciones precedentes permiten escribir inmediatamente la derivada de un orden cualquiera en forma de determinante. Se tiene, en efecto,

$$\frac{d^n \log f(x)}{d x^n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ D_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & D_1 \\ D_3 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 2D_1 & D_2 \\ D_4 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 3D_2 & D_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{n-1} & 1 & \frac{n-2}{1} D_1 & \ldots & \frac{n-2}{1} D_{n-2} & D_{n-2} \\ D_n & \frac{n-1}{1} D_1 & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} D_2 & \ldots & \frac{n-1}{1} D_{n-2} & D_{n-2} \end{vmatrix}$$

Por $n = 4$, por ejemplo, resultará:

$$\frac{d^4 \log f(x)}{d x^4} = (-1)^6 \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 & 1 \\ D_2 & 0 & 1 & D_1 \\ D_3 & 1 & 2D_1 & D_2 \\ D_4 & 3D_1 & 3D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

$$= D_4 - 4 D_1 D_3 - 3 D_2^2 + 12 D_1^2 D_2 - 6 D_1^4$$

La edición oficial colombiana del Atlas Histórico Universal

POR EL DOCTOR ALFREDO JAHN

Individuo de Número de la Academia

La Cámara de Cultura de Bogotá ha tenido la gentileza de enviarme un ejemplar del "Atlas Histórico Universal", del cual son autores el Dr. Mario Baratta, profesor de la Universidad de Pavía y el Dr. Luigi Visintin, director científico de la renombrada Editorial Instituto Geográfico de Agostini de Novara (Italia). Este valioso auxiliar para la enseñanza de la Historia Universal ha sido especialmente editado en el Instituto Agostini por orden del Ministerio de Educación Pública de Colombia. Contiene 51 mapas de 33 x 24 centímetros, nítidamente grabados e impresos en colores, que exhiben las ubicaciones de los pueblos antiguos, las de sus culturas, migraciones y expansiones y las consiguientes transformaciones que han sufrido las divisiones étnicas y políticas de los diferentes continentes en el transcurso histórico de la Humanidad.

Sendas cartas geográficas exponen también los itinerarios seguidos por descubridores, conquistadores y ex-