SOBRE EL PROMEDIO ESPACIAL DEL CICLO DE POINCARE (*)

Por Luis BAEZ DUARTE

El propósito de esta nota es dar una prueba nueva y bastante elemental de un conocido teorema de M. KAC [1].

Sea (X, Σ, μ) un espacio medible de medida finita ($\mu(X) < \infty$). Sea T una transformación biunívoca de X en si mismo que preserva la medida. Esto es

$$\mu(E) = \mu(T^{-1}E) = \mu(TE)$$

para todo $E \epsilon \Sigma$. Para cualquier conjunto $E \epsilon \Sigma$ definamos la función asociada $n_E(x)$ para todo $x \epsilon E$, como sigue

$$n_E(x) = \min \{n ;\ n > 0,\ T^n x \in E\},$$

o sea, $n_E(x)$ es el *primer tiempo de retorno* de x a E, o bien *el ciclo de Poincaré de* x.

Denotemos por I_E el menor conjunto invariante que contiene a E. Con estas hipótesis se tiene el siguiente teorema:

Teorema. Para todo $E \epsilon \Sigma$

$$(*) \qquad \int_E n_E(x)\, d\mu = \mu(I_E)$$

Prueba. Pongamos χ_A = función característica del conjunto A. Por definición de n_E se tiene

(*) Presentado en la sesión del día 30 Set. 64 por el académico F. J. Duarte.

$$\chi_{E^c}(Tx)\cdot\chi_{E^c}(T^2x)\cdots\chi_{E^c}(T^nx) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < n_E(x) \\ 0 & \text{si } n \geq n_E(x) \end{cases}$$

Por lo tanto sumando de n = 1 a ∞ obtenemos

$$n_E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E^c}(Tx)\ldots\chi_{E^c}(T^nx) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[\bigcup_{\nu=1}^{n} T^{-\nu}E]^c}$$

Nótese que para cada $x \epsilon E$ sólo hay un número finito de términos igual a 1 en la serie y los demás son cero. Esto se sigue del *teorema de recurrencia de Poincaré* (*) que implica $n_E(x) < \infty$ para casi cualquien $x \epsilon E$. Ahora integrando resulta

$$(1) \qquad \int_E n_E(x)\,d\mu = \mu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left([\bigcup_{\nu=1}^{n} T^{-\nu}E]^c \cap E\right)$$

Pero T^n es biunívoca y preserva la medida para todo n, luego

$$\mu([\bigcup_1 T^{-\nu}E]^c \cap E) = \mu\left([\bigcup_0^{n-1} T^{\nu}E]^c \cap T^nE\right)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$(2) \qquad \int_E n_E(x)\,d\mu = \mu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left([\bigcup_1^{n-1} T^{\nu}E]^c \cap T^nE\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^nE\right),$$

(*) Ver por ejemplo P. R. Halmos, Ergodic Theory, Chelsea Publ. Co., New York, 1956, pág. 10. De hecho debe nnotarse que la igualdad (2) prueba que n_E es integrable en E y que por lo tanto es finita *presque partout*, o sea, que el teorema de Poincaré se sigue de nuestro razonamiento.

donde la última igualdad se sigue de la descomposición canónica de una unión de conjuntos sin intersección:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n E = E \cup (E^c \cap TE) \cup ((E \cup TE)^c \cap T^2 E) \cup \cdots$$

Ahora bien, es claro que $\bigcup_{n\geqslant 0} T^n E$ es invariante ya que $T \bigcup_{n\geqslant 0} T^n E \subseteq \bigcup_{n\geqslant 0} T^n E$. También es obvio que contiene a E y que es el menor conjunto que conteniendo a E es invariante. Por consiguiente

$$\bigcup_{n\geqslant 0} T^n E = I_E$$

lo que sustituído en (2) nos da (*).

Nota: Si la transformación es ergódica, entonces $I_E = X$, lo que nos da como caso particular el mencionado teorema de Kac, que para un espacio de probabilidades $[\mu(x) = 1]$ se reduce a

$$\int_E n_E(x)\, d\mu = 1.$$

California Institute of Technology.

REFERENCIA

[1] M. KAC: On the Notion of Recurrence in Discrete Stochastic Processes. *Bull. Am. Math. Soc.* Vol. 53, (1947) pp. 1.002-1.010, Thm. 2'.