SOBRE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS DE TERCER GRADO CON UNA SOLA RAIZ RACIONAL. SIMPLIFICACION DEL CRITERIO DE KUMMER (*)

Por F. J. DUARTE

La fórmula de CARDAN y TARTAGLIA para resolver la ecuación algebráica de tercer grado, presenta en muchos casos la raíz, cuando la ecuación admite una sola raíz racional, como límite de la suma de dos números irracionales. Por ejemplo, la ecuación

$$(1)\quad \chi^3 + 27\chi - 260 = 0$$

admite la raíz racional 5, y ésta es dada por la fórmula en la forma siguiente:

$$\chi = \sqrt[3]{130 + 17\sqrt{61}} + \sqrt[3]{130 - 17\sqrt{61}}$$

Consideramos la ecuación

$$(2)\quad \chi^3 + 3\,(2b - g^2)\,\chi - 2g\,(3b - g^2) = 0$$

en la que b, g son números racionales arbitrarios y cuya raíz real es g. Por la fórmula de CARDAN se obtiene

$$\chi = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}},$$

(*) Trabajo leído en la 2ª sesión del Symposium de 1964, el día 28-5-64.

poniendo

$$a = g\ (3b - g^2),\ c = 8b - 3g^2.$$

Si c y g son dados, se tendrá:

$$(3)\ a = \frac{g}{8}\ (3c + g^2),\ b = \frac{1}{8}\ (c + 3g^2).$$

Se obtendrá, pues, un número infinito de ecuaciones de tercer grado con una raíz racional calculable solo por aproximación mediante la fórmula de CARDAN, tomando g igual a un número racional y c igual a un número racional positivo no cuadrado perfecto. Los valores de a, b son dados entonces por las fórmulas (3). Por ejemplo, si se toma $g = 5$, $c = 61$, se tendrá: $a = 130$, $b = 17$ y se obtiene la ecuación (1) ya considerada.

El célebre matemático alemán KUMMER halló (*) que las ecuaciones de tercer grado con una sola raíz racional que puede determinarse *exactamente* por la fórmula de CARDAN, son las que pueden reducirse a la forma:

$$(4)\ \chi^3 - (\alpha + 2\beta)\ \chi^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)\ \chi - \alpha\ (\beta^2 + 3\gamma^2) = 0$$

con α,β,γ racionales y α es la raíz real.

Este enunciado puede presentarse bajo una forma mucho más simple. En efecto, si hacemos desaparecer el término en χ^2 en la ecuación de KUMMER, ésta tomará la forma:

$$t^3 - 3\ (a^2 - b^2)\ t - 2a\ (a^2 + 3b^2) = 0$$

poniendo $\dfrac{1}{3}\ (\alpha - \beta) = a,\ \gamma = b.$

Si ponemos ahora

$$a + b = m,\ a - b = n$$

(*) Ed. Kummer, *Mathesis*, 1881, p. 96.

la ecuación se reduce a

$$(5)\ t^3 - 3mnt - (m^3 + n^3) = 0,$$

siendo m, n números racionales, y su raíz real es $m + n$.

Tal es la forma muy sencilla a la cual pueden reducirse todas las ecuaciones algebráicas de tercer grado con una sola raíz racional que es dada *exactamente* por la fórmula de CARDAN-TARTAGLIA.

La ecuación (2) no puede reducirse a la forma (5). En efecto, deberá tenerse:

$$2b - g^2 = - mn,\ 2g\ (3b - g^2) = m^3 + n^3$$

y se deduce:

$$(m^3 - n^3)^2 = 4b^2\ (8b - 3g^2) = 4b^2c.$$

Esta ecuación es imposible en números racionales, porque c es, por hipótesis un número racional no cuadrado perfecto. Así, la raíz χ resulta expresada por la suma g de dos cantidades irracionales, cualesquiera que sean los valores racionales que se den a los parámetros b, g, con c positivo y no cuadrado perfecto.

Caracas, mayo de 1964.

RESUMEN

Se da una expresión general de las ecuaciones algebráicas de 3er. grado con una sola raíz racional que no puede determinarse exactamente, sino por aproximación, mediante la fórmula de CARDAN.

Se expone el criterio de KUMMER para saber cuáles son las ecuaciones cuya única raíz racional puede calcularse exactamente por la misma fórmula.

Se da un criterio más sencillo que el de KUMMER.