SOBRE EL NUEVO VALOR DE Pi CON 100 000 DECIMALES (*)

Por *F. J. Duarte.*

Recientemente, a fines de 1961, se ha determinado, haciendo uso de máquina electrónica el valor de π con 100 000 decimales. Este hecho, que es sin duda, una hazaña científica extraordinaria, ha pasado inadvertido para la generalidad del público.

Fue en el tercer siglo antes de Cristo cuando se conoció el valor de π con 2 decimales exactas por las relaciones.

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Si se tiene en cuenta la época y el estado de atraso en que se hallaba entonces la Aritmética, ese resultado es tan sorprendente que sólo la inteligencia de un genio extraordinario como era Arquímedes, fue capaz de establecerlo.

Más tarde, en el siglo XVI, el geómetra holandés Ludolph van Ceulen empleando el método de Arquímedes y mediante cálculos para los cuales se requería extraordinaria paciencia y tiempo, calculó 34 decimales exactas de π. Ese valor está grabado sobre la losa de su tumba en la iglesia de San Pedro en Leyden.

Luego, con el empleo de las series convergentes se pudo llevar el valor de π, siempre con laboriosos cálculos, hasta 140, 200, 280; después hasta 527 y finalmente a 808 decimales.

Fue con el empleo de estas mismas series, como los matemáticos Daniel Shanks y John W. Wrench calcularon el valor de π con cien

(*) Comunicación leída en la segunda sesión del Symposium, celebrada el 21-3-63.

mil decimales, sirviéndose como ya se dijo, de una máquina I B M de grandes dimensiones.

Desde hace varios años había gran interés en prolongar las cifras decimales de π. Este interés tenía por fin principal el estudio de la distribución de las cifras.

La ley de probabilidad o ley de los grandes números de Bernoulli expresa que, cuando el número de pruebas aumenta indefinidamente, la frecuencia de un caso determinado que se puede llamar *caso favorable,* tiene por límite la probabilidad de ese caso. Por ejemplo, si se considera como caso favorable la presencia en el valor de π de determinado guarismo de la sucesión 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, la ley citada nos enseña que la frecuencia de ese caso favorable tiene por límite $\frac{1}{10}$, cuando el número de pruebas aumenta indefinidamente, es decir, mientras más cifras decimales de ese número sean calculadas.

El célebre matemático francés Emile Borel llama *números normales* por relación al sistema decimal de numeración a los números decimales ilimitados tales que los grupos de un número cualquiera de n cifras consecutivas satisfagan a la citada ley de probabilidad. Ahora, no es posible saber en el estado actual de la ciencia, si los números irracionales que conocemos y cuyo desarrollo decimal por lo tanto tiene infinitas cifras, como π, e, la constante de Euler, son o no números normales. Pero, como esos números no tienen un nexo especial con la base 10 del sistema decimal, es poco probable que una cifra dada, por ejemplo, 7 sea más frecuente o menos frecuente que otra cualquiera. Lo más verosímil parece ser que el desarrollo o expresión de esos números en el sistema decimal obedezca a la ley de Bernoulli. Se sabe que los números π, e son *trascendentes,* es decir que no son raíces de ecuaciones algebráicas con coeficientes reales y número finito de términos.

Dice Borel en su obra *Les Nombres Inaccesibles* lo siguiente: "Los números π, e que tienen en análisis un papel importante y cuyas cifras decimales nos aparecen como una masa confusa de donde no se desprende ninguna ley, deberán aparecer a quien supiera descubrir las leyes complejas, tan interesantes y tan hermosos como un célebre soneto. Pues somos incapaces de conocer, por ejemplo, la ley misteriosa que sigue la numeración de las cifras decimales del número π."

No debe olvidarse, advierte el mismo Borel, que el conocimiento de un número de decimales por grande que sea de un número con infinitas cifras o *número inaccesible,* no revela ninguna propiedad del número. Pues ese mismo número de cifras decimales puede corresponder a un número racional o a un número irracional muy próximo a aquél. Por ejemplo, las primeras 100 000 decimales de π corresponden también a un número infinito de números irracionales o de números racionales muy próximos a π. Por ejemplo, el número

$\pi + \dfrac{\sqrt{2}}{100\,010}$ tiene evidentemente comunes con π al menos las primeras 100 000 decimales y es irracional. Un número racional muy próximo a π sería, por ejemplo, el número formado por las 100 000 primeras decimales de π seguidas de infinito número de cifras iguales a 5, pues ese número sería una fracción racional cuyas primeras 100 000 cifras serían las mismas de π.

La conocida fórmula del inglés Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

fue la que me sirvió hace más de 60 años para calcular el valor de π con 200 decimales. Vamos a estudiar en ese valor la distribución de las cifras y otras particularidades interesantes. He aquí el valor de π con 200 decimales:

π =	3,141592	653589	793238	462643	383279
	502884	197169	399375	105820	974944
	592307	816406	286208	998628	034825
	342117	067982	148086	513282	306647
	093844	609550	582231	725359	408128
	481117	450284	102701	938521	105559
	644622	948954	930381	96.	

La distribución de las cifras es como sigue, entrando la cifra 3 en el cómputo:

1	....	20	0	....	19	
3	....	20	2	....	24	
5	....	20	4	....	22	$95 + 106 = 201$
7	....	12	6	....	16	
9	....	23	8	....	25	
		95			106	

Hacemos notar las cifras repetidas 11, 22, 33, 44, 55, 66, 88, 99; 111, 555.

El valor de π con 100 000 decimales calculado por Shanks y Wrench lo fue mediante la fórmula de Störmer:

$$\pi = 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

La comprobación de los cálculos se hizo por la fórmula de Gauss:

$$\pi = 48 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 32 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Este cálculo se hizo en $8^h\ 1^m$ en el sistema binario de numeración, lo que dió cerca de 600 000 cifras decimales. Para la conversión al sistema decimal con 100 000 cifras se emplearon sólo 42^m. Así, el resultado exacto se obtuvo en $8^h\ 43^m$.

El cálculo de π con 200 decimales me ocupó durante 5 meses a 10^h diarias. Zacarías Dahse, calculador prodigio alemán obtuvo las 200 decimales en 2 meses (1844) con el empleo de la misma fórmula de Machin. Sería absolutamente imposible el cálculo de series convergentes por los medios de cálculos directos para obtener 100 000 decimales. Basta hacer notar que para escribir los términos positivos de la serie $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{239}$ se necesitaría una hoja de papel de cerca de 200 metros de largo, si se les escribe a la pluma en caracteres bien visibles. En todo caso, el cálculo directo exigiría una multitud de calculadores durante muchísimos años y aún así es muy dudoso que se pudiera llegar a obtener el resultado que la máquina dió en menos de 8^h y tres cuartos, como ya se dijo.

Se había hallado ya el valor de π con 2000 decimales con máquina electrónica (Eniac) en 1949 por John von Newman y con 10000 decimales, también con máquina electrónica, en 1958, por François Genuys.

Volvamos a la distribución de las cifras. No hemos hecho aún el cómputo para las 100 000 cifras, sino sólo para las 10 000 primeras. Es como sigue, incluyendo la cifra entera 3 en el cómputo:

1	1026	0	968	
3	975	2	1021	
5	1046	4	1012	5031 + 4970 = 10001.
7	970	6	1021	
9	1014	8	948	
	5031		4970	

Hasta 200 decimales las cifras 7 y 6 son las menos frecuentes. Con 10 000 la cifra 8 es la menos frecuente y luego la 0.

Creo que era de interés el comunicar a la Academia en esta ocasión suceso tan extraordinario como lo es el cálculo de π con cien mil decimales.

BIBLIOGRAFIA

1) F. J. DUARTE.—π con 200 decimales.—Manuscrito en folio de XXXIV- 45 p. Puerto Cabello, 1902. Enviado en copia a la Academia de Ciencias de París. *Comptes Rendus des* Séancas, t. 146, 1908. *L'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. 27, París, 1922.

2) Emile BOREL.—*Les Nombres Inaccessibles.*—Collection des Monographies sur la Théorie des fonctions. 8º, 141 p. París, 1952.

3) *The Mathematic Teacher.* Vol. 53, Nº 8, 1960.

4) Daniel SHANKS and John W. WRENCH, Jr.—Computation of π to 100 000 decimals. *Mathematics of Computation,* Vol. 16, Nº 77, 1962.

5) Carta de John W. Wrench Jr. a F. J. Duarte. Washington, 28 de Mayo de 1962.