SOBRE FORMULAS DE APROXIMACION DE LAS TASAS DE INTERESES

Por el Dr. *Erich Michalup.*

Disponemos de algunas tablas (1) que permiten la determinación de la tasa contínua δ correspondiente a cierta tasa efectiva i y viceversa, valores requeridos frecuentemente para resolver problemas en matemáticas financieras. Por ese motivo conviene conocer fórmulas de aproximación que permiten efectuar la conversión de cualquier tasa a la otra cuya relación está definida por

$$(1)\quad \delta = \ln (1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots\ldots$$

siendo la serie infinita convergente en el intervalo semicerrado $-1 < i \leq 1$. Sabemos que en la mayoría de los casos la tasa de interés no excede de 10% por lo cual aplicaremos las fórmulas obtenidas a esa tasa para apreciar fácilmente la aproximación lograda. Obtendremos una convergencia más rápida por la substitución

$$X = i / (2 + i)$$

con el resultado

$$(2)\quad \delta = \ln (1 + i) = \ln \frac{1+X}{1-X} = 2\,X\,(1 + \frac{X^2}{3} + \frac{X^4}{5} + \frac{X^6}{7} + \ldots).$$

Tomaremos en cuenta solamente los primeros términos de la serie en el paréntesis. Pondremos, para abreviar,

$$f\ (X) = a_0 + a_1 X^2 + a_2 X^4 + a_3 X^6 + \ldots\ldots$$

y utilizando la substitución de Euler

$$\begin{aligned} y = X^2/\ (s + X^2),\ X^2 &= s\,y/\ (1-y) = s\,y + s\,y^2 + s\,y^3 + \ldots\ldots \\ X^4 &= \qquad\qquad\qquad s^2\,y^2 + 2\,s^2\,y^3 + \ldots\ldots \\ X^6 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + s^3\,y^3 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

determinaremos el parámetro s de modo que se anule el coeficiente de $+ y^2$ con el resultado

$$(3)\quad f(X) = \frac{a_0 a_1 - X^2 (a_0 a_2 - a_1^2)}{a_1 - a_2 X^2} + \frac{a_1{}^2 X^6 (a_1 a_3 - a_2^2)}{(a_1 - a_2 X^2)^3} + \ldots.$$

Aplicamos esta transformación a la ecuación (2) y despreciando en (3) los términos siguientes a los primeros dos, obtendremos

$$\delta = \ln (1 + i) = 2 X \left(\frac{15 - 4 X^2}{15 - 9 X^2} + \frac{20 X^6}{7 (5 - 3 X^2)^3} \right)$$

o sea

$$(C)\quad \delta = \ln (1 + i) = \frac{2 i}{2 + i} \left(\frac{15 (2 + i)^2 - 4 i^2}{15 (2 + i)^2 - 9 i^2} + \frac{20 i^6}{7 [5 (2 + i)^2 - 3 i^2]^3} \right)$$

y utilizando únicamente el primer término resulta

$$(A)\quad \delta = \ln (1 + i) = \frac{2 i}{2 + i} \; \frac{15 (2 + i)^2 - 4 i^2}{15 (2 + i)^2 - 9 i^2}.$$

Aplicando el mismo procedimiento a la serie en paréntesis

$$\delta = \ln (1 + i) = 2 X + \frac{2 X^3}{3} \left(1 + \frac{3 X^2}{5} + \frac{3 X^4}{7} + \frac{3 X^6}{9} + \ldots\ldots \right)$$

se obtiene

$$\delta = 2 X + \frac{2 X^3}{3} \left(\frac{35 - 4 X^2}{35 - 25 X^2} + \frac{28 X^6}{3 (7 - 5 X^2)^3} \right)$$

o sea

$$(D)\quad \delta = \ln (1 + i) =$$

$$\frac{2 i}{2 + i} \left\{ 1 + \frac{i^2}{3 (2 + i)^2} \left[\frac{35 (2 + i)^2 - 4 i^2}{35 (2 + i)^2 - 25 i^2} + \frac{28 i^6}{3 [7 (2 + i)^2 - 5 i^2]^3} \right] \right\}$$

y despreciando el último término

$$(B)\quad \delta = \ln (1 + i) = \frac{2 i}{2 + i} \left(1 + \frac{i^2}{3 (2 + i)^2} \; \frac{35 (2 + i)^2 - 4 i^2}{35 (2 + i)^2 - 25 i^2} \right)$$

Agrupamos los términos en (2) en la forma siguiente

$$2\,X\left(1+\frac{X^4}{5}+\frac{X^8}{9}+\frac{X^{12}}{13}+\dots\right)$$

$$+\frac{2\,X^3}{3}\left(1+\frac{3\,X^4}{7}+\frac{3\,X^8}{11}+\frac{3\,X^{12}}{15}+\dots\dots\right)$$

se tendrá por el mismo procedimiento

$$2\,X\left(\frac{45-16\,X^4}{45-25\,X^4}+\frac{144\,X^{12}}{13\,(9+5\,X^4)^3}\right)$$

$$+\frac{2\,X^3}{3}\left(\frac{77-16\,X^4}{77-49\,X^4}+\frac{176\,X^{12}}{5\,(11-7\,X^4)^3}\right)$$

y despreciando el segundo término en ambos paréntesis

$$\text{(D)}\quad \delta=\ln\,(1+i)=\frac{2\,i}{2+i}$$

$$\left(\frac{45\,(2+i)^4-16i^4}{45\,(2+i)^4-25i^4}+\frac{i^2}{3\,(2+i)^2}\;\frac{77\,(2+i)^4-16i^4}{77\,(2+i)^4-49i^4}\right)$$

El problema inverso será

$$y=\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\ln\,(1+i)=X+\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{5}+\dots\dots=\frac{1}{2}\ln\frac{1+X}{1-X}=\arg\,tg\,h\,X$$

o sea

$$X=tg\,h\,y=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2^{2K}\,(2^{2K}-1)\,B_{2K}}{(2\,K)!}\,y^{2K-1}$$

y los primeros términos de la serie serán

$$\frac{i}{2+i}=tg\,h\,y=X=y-\frac{y^3}{3}+\frac{2\,y^5}{15}$$

$$-\frac{17\,y^7}{315}+\frac{62\,y^9}{2835}-\frac{1382\,y^{11}}{155925}+\dots$$

y substituyendo $y = \delta/2$

$$\frac{i}{2+i} = X = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^3}{24} + \frac{\delta^5}{240} - \frac{17\,\delta^7}{40320} + \frac{31\,\delta^9}{725760} -$$

$$- \frac{691\,\delta^{11}}{159667200} + \ldots\ldots$$

Aplicaremos a los primeros 4 términos el procedimiento anterior con el resultado

$$X = \frac{\delta}{2}\left[\frac{60+\delta^2}{6\,(10+\delta^2)} - \frac{5\,\delta^6}{504\,(10+\delta^2)^3}\right]$$

o sea

$$(F) \quad i = \frac{2\,\delta\,[84\,(60+\delta^2)\,(10+\delta^2)^2 - 5\,\delta^6]}{1008\,(10+\delta^2)^3 - \delta\,[84(60+\delta^2)\,(10+\delta^2)^2 - 5\,\delta^6]}$$

o simplemente

$$(G) \quad i = \frac{2\,\delta\,(60+\delta^2)}{12\,(10+\delta^2) - \delta\,(60+\delta^2)}.$$

Si utilizamos el mismo procedimiento empleado en el desarrollo de la fórmula (E) llegaremos a

$$X = \frac{\delta}{2}\;\frac{45360 - 87\,\delta^4}{45360 - 465\,\delta^4} - \frac{\delta^3}{24}\;\frac{942480 - 137\,\delta^4}{942480 - 9674\,\delta^4}$$

pero la expresión que resulta después de la substitución no es tan simple como se desea.

Producen los desarrollos anteriores aproximaciones buenas; pero buscaremos otros métodos de fácil aplicación. Sabemos que puede desarrollarse en fracción contínua

$$\ln\,(1+i) = \frac{i\,|}{|\,1} + \frac{1^2\,i\,|}{|\,2} + \frac{1^2\,i\,|}{|\,3} + \frac{2^2\,i\,|}{|\,4} + \frac{2^2\,i\,|}{|\,5} + \frac{3^2\,i\,|}{|\,6} + \ldots\ldots$$

La ley de formación de los numeradores A_n y de los denominadores B_n de las fracciones de aproximación es

$$A_n = b_n\,A_{n-1} + a_n\,A_{n-2}$$
$$B_n = b_n\,B_{n-1} + a_n\,B_{n-2}$$

y el cuadro siguiente contiene las expresiones correspondientes a las primeras fracciones de aproximación

n	b_n	a_n	A_n	B_n
0	1	i	i	1
1	2	i	2i	2 + i
2	3	i	i(6 + i)	6 + 4i
3	4	4i	12i(2 + i)	$4(6 + 6i + i^2)$
4	5	4i	$4i(30 + 21i + i^2)$	$4(30 + 36i + 9i^2)$
5	6	9i	$12i(60 + 60i + 11i^2)$	$36(20 + 30i + 12i^2 + i^3)$

La convergencia es muy lenta y las fracciones de aproximación proporcionan para $i = 10\%$ los valores siguientes:

n	0	1	2	3	4	5
A_n/B_n	1/10	2/21	61/640	63/661	3211/33690	6611/69363

Mejor convergencia resulta de la fracción continua equivalente

$$\delta = \ln(1+i) = 2x \left[\frac{1|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} - \frac{4x^2|}{|5} - \frac{9x^2|}{|7} - \frac{16x^2|}{|9} - \ldots \right]$$

como se puede apreciar del cuadro siguiente:

n	b_n	a_n	A_n	B_n
0	1	1	1	1
1	3	$-x^2$	3x	$3 - x^2$
2	5	$-4x^2$	$15 - 4x^2$	$15 - 9x^2$
3	7	$-9x^2$	$105 - 55x^2$	$105 - 90x^2 + 9x^4$
4	9	$-16x^2$	$945 - 735x^2 + 64x^4$	$945 - 1050x^2 + 225x^4$
5	11	$-25x^2$	$1155 - 1190x^2 + 231x^4$	$1155 - 1575x^2 + 525x^4 - 25x^6$

y la quinta fracción de aproximación proporciona la fórmula

$$\text{(H)} \qquad \delta = 2i(2+i) \frac{1155(2+i)^4 - 1190(2+i)^2 i^2 + 231\, i^4}{1155(2+i)^6 - 1575(2+i)^4 i^2 + 525(2+i)^2 i^4 - 25\, i^6}$$

Por otro lado podemos expresar según Lambert (II) el valor de

$$x = \operatorname{tg} h\, y = (e^y - e^{-y})/(e^y + e^{-y})$$

por la fracción continua

$$x = \frac{y}{|1} + \frac{y^2|}{|3} + \frac{y^2|}{|5} + \frac{y^2|}{|7} + \ldots\ldots$$

y las fracciones de aproximación serán:

n	a_n	b_n	A_n	B_n
0	y	1	y	1
1	y^2	3	$3y$	$3 + y^2$
2	y^2	5	$y(15 + y^2)$	$15 + 6y^2$
3	y^2	7	$5y(21 + 2y^2)$	$15(7 + 3y^2) + y^4$
4	y^2	9	$105y(9 + y^2) + y^5$	$15[7(9 + 4y^2) + y^4]$
5	y^2	11	$21y(495 + 60y^2 + y^4)$	$105(99 + 45y^2 + 2y^4) + y^6$

La cuarta fracción de aproximación será

$$\text{(I)} \qquad i = \frac{2\delta[420(36 + \delta^2) + \delta^4]}{30(1008 + 112\delta^2 + \delta^4) - \delta[420(36 + \delta^2) + \delta^4]}$$

y la quinta

$$\text{(J)} \qquad i = \frac{84\delta(7920 + 240\delta^2 + \delta^4)}{840(792 + 90\delta^2 + \delta^4) + \delta^6 - 42\delta(7920 + 240\delta^2 + \delta^4}$$

Para poder apreciar la aproximación lograda anotamos en el cuadro siguiente los valores obtenidos por aplicación de las fórmulas basándose en una tasa de 10% anual y comparándolos con los valores exactos.

$i = 10\%$; $\delta = 0{,}09531$ 01798 04324 86004 3952....
$\delta = 10\%$; $\delta = 0{,}10517$ 09180 75647 62481 17078 2....

FORMULA	RESULTADO					
A	0,09531	01797	78			
B	0,09531	01798	04301	9		
C	0,09531	01798	04329	9		
D	0,09531	01798	04324	86815		
E	0,09531	01798	04324	85984		
H	0,09531	01798	04324	86003	91	
F	0,10517	09180	75648	59		
G	0,10517	09180	76745			
I	0,10517	09180	75647	62481	28	
J	0,10517	09180	75647	62481	17078	0

Queremos solamente mencionar que resulta de la fórmula H, el valor
ln 2 = 0,69314 71798 8

correspondiente a una tasa de 100%, y de la fórmula J el valor de
e-l = 1,71828 18284 5856

correspondiente a una tasa contínua de 100% en comparación con los valores
ln 2 = 0,69314 718055 y
e-l = 1,71828 18284 59045 que encontramos en III y IV

B I B L I O G R A F I A

(1) MCKENZIE "On a Method of Approximating to the Rate of Interest in an Annuity-Certain", Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine, Vol. XXIII., Part. VI., página 417. Londres, 1882.

STEFFENSEN.—"A Table of the Function G (x) = x/(1—e−x) and its Application to Problems in Compound Interest", Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1938 páginas 47-71, Uppsala.

SEGERDAHL.—"A Table of the Interest Intensity Function for Interest Intervals of 0,01% from 0% to 7%". Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1949, páginas 15-20, Uppsala.

VANLAER.—"Méthodes et tables pour le calcul avec 15 chiffres du taux d' intérêt d' une annuité certaine", Bulletin Trimestriel de l' Institut des Actuaires Français, Nº 207, páginas 109-142, Paris 1954.

(II) LAMBERT.—"Beitráge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendungen" segunda parte, Berlin, 1770.

(III) F. J. DUARTE.—"Nouvelles Tables Logarithmiques a 36 décimales", Paris, 1933, Pág. VII.

(IV) F. J. DUARTE.—"Monografía sobre los números pi y e", Caracas, 1949, Pág. 176.