SOBRE LA CONSOLIDACION DE LA MECANICA CLASICA

Trabajo de Incorporación del Doctor
SANTIAGO VERA IZQUIERDO

En la urgencia de hallar alguna justificación a la honra que me confirieron los ilustres académicos al elegirme para formar parte de su número en la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, dime a investigar con imparcialidad mi vida científica y profesional sin que a todo lo largo de ella encontrase no ya un motivo, pero ni siquiera un pretexto para dicha honra, como no haya sido la extremada generosidad de aquéllos. Al aceptar mi postulación, y ahora, al presentarme oficialmente a esta corporación, ha sido mi criterio el que debo considerar la honra de la designación como una voz de aliento y de estímulo para los años que aún me quedan de trabajo.

Con todo, y sin que los considere en manera alguna méritos suficientes, he creído que en la mente de los académicos influyeron los numerosos años en que he ejercido la docencia universitaria, y es por esto por lo que me ha parecido que, como trabajo de incorporación, debo imitar al monje de la leyenda y ofrecer con la mejor voluntad posible aquello a que me he dedicado con mayor empeño desde la cátedra: a encontrar y a desarrollar un esquema de presentación de la Mecánica Racional Clásica que, al obviar los obstáculos epistemológicos que han debilitado los más hondos cimientos de la ciencia física, permita establecerla sobre una base firme, digna del éxito grande que en la historia de la ciencia representa la Mecánica clásica newtoniana. La Mecánica se presenta llena de dificultades en la formulación de sus principios básicos. Genios de la talla de Newton creyeron haber hallado terreno firme de fundación pero éste resultó después ser movedizo y deleznable. Con todo, no cabe duda que la Mecánica de Newton engendró ciencias nuevas y ha sido el origen de todos los descubrimientos de la ciencia y la tecnología, sin excluir los de la física atómica, que, aparentemente divorciada de las ideas clásicas, utiliza conceptos de ella derivados y se apoya sobre sus principios, modificados, sí, para ajustarlos a los nuevos postulados, pero aún vigentes en su aspecto más profundo

Ernst Mach, filósofo y matemático vienés, publicó en 1868 un breve ensayo titulado "Uber die Definition der Masse", en el cual propone un esquema de razonamiento tendiente a consolidar definitivamente la Mecánica newtoniana, en cuya formulación original fué, según dice Einstein (1), el primero en "señalar un defecto epistemológico inherente". Mach logra establecer bases firmes para la ciencia clásica y prepara el camino para la moderna al hacer el concepto de masa independiente del de cantidad de materia. Ha sido recientemente cuando la memoria de Mach ha recibido el reconocimiento que merece quien ha contribuído a establecer o aclarar conceptos científicos, pero la explicación de este menosprecio es obvia: la producción intelectual de Mach ocurrió durante un lapso (1868-1913) en que la investigación filosófico-científica corría por los caminos de la ciencia nueva mientras que el propósito de Mach era afirmar los de la clásica. Se necesitaron varias décadas para que la humanidad se diera cuenta de que la nueva ciencia presuponía la clásica y de que el esfuerzo de Mach no fué en vano. Se ha adoptado recientemente su nombre en el campo tecnológico, y el número de Mach y el ángulo de Mach son conceptos familiares en la Mecánica de los fluidos.

En mi trabajo de cátedra desde hace ya quince años y en mi obra de texto publicada hace cinco, sigo las líneas generales del razonamiento de Mach con las modificaciones que aportaron Paul Appell (2) y Lindsay and Margenau (3). Las sanas críticas y las discusiones en el aula y fuera de ella, me han llevado a modificar más aún el esquema fundamental de Mach, y en la forma final de presentación he pretendido incluir entre los postulados básicos y las definiciones, el principio de la superposición de los efectos de las fuerzas, del cual se deduce como teorema la llamada ley del paralelogramo de las fuerzas. Stevin (1548-1620) propuso esta ley como el resultado de experimentación con *fuerzas en equilibrio*. Newton creyó haber encontrado una demostración basada en sus propias leyes y en conceptos cinemáticos, y así presenta la ley como "Corolario I" de sus "Axiomas o leyes del movimiento" (4), pero Leonard Euler probó que la formulación de Newton no permitía la deducción directa sin introducir una nueva hipótesis (5). El principio del paralelogramo es el vínculo de unión entre la estática y la dinámica, y es también el puente de unión entre los conceptos abstractos referidos al punto material y los concretos que se aplican a los cuerpos naturales.

Creo también haber logrado presentar los principios de la Estática como deducidos, al mismo tiempo que los de la Dinámica, del mismo grupo de postulados y definiciones.

---

(1) **A. Einstein:** "Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie".
(2) **Paul Appell:** "Mécanique Rationnelle".
(3) **Lindsay and Margenau:** "Foundations of Physics".
(4) **Florian Cajori:** "Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy".
(5) **L. Euler:** "Meccanica sive motus scientiae analytice exposita".

Las teorías de Mach tienen vigencia actual no sólo para el técnico que no puede prescindir en su trabajo del concepto "fuerza" el cual, sin esta teoría, no sale del mundo de los conceptos intuitivos, antropomórficos, vagos, sino también para el investigador científico, para quien la comodidad de expresión que este concepto lleva consigo le persuade a prescindir de la idea moderna que niega la existencia de fuerzas como entes físicos, y lo vemos empleando el vocablo con la misma soltura con que lo hace un proyectista de estructuras. Casi no hay para qué mencionar que lo más importante de estas teorías es la misma definición de masa, ya que este concepto juega hoy día en la ciencia un papel aún más importante que el que jugó en tiempos de Laplace y Leverrier.

Desde el "Diálogo sobre dos ciencias nuevas" de Galileo hasta la obra de Levi-Civita (6), aparecida recientemente en tercera edición, ha sido norma casi inviolada la de presentar la Estática como una ciencia diferente de la Dinámica, basada en postulados y definiciones distintas, con lo cual permanece siempre oscuro el lazo que las une en un problema real en que figuran cargas y reacciones frente a velocidades y aceleraciones. No me asalta la menor duda de que la contribución de Mach al unificar y consolidar la Mecánica newtoniana merece en 1960 la atención de los que piensan con seriedad en los fundamentos filosóficos de la ciencia que utilizan, ya con los fines prácticos de la tecnología, ya con los más teóricos de la investigación.

* * *

Bastante se ha escrito y bastante se ha exagerado acerca de lo que pudiéramos llamar el enigma newtoniano, o sea, el hecho de que entre las definiciones y las famosas "leyes del movimiento" existe un aparente círculo vicioso o una petición de principio. Fuerza es toda acción que tiende a modificar el estado de reposo o de movimiento rectilíneo de un cuerpo. Todo cuerpo continúa moviéndose uniformemente sobre una recta, a menos que exista una fuerza que le obligue a modificar dicho tipo de movimiento. Cantidad de materia es el producto del volumen por la densidad, dice Newton, sin definir lo que es densidad. No es concebible en Newton el caer en un error elemental de lógica. Lo que ocurre, y esto se puede deducir de la misma redacción de su definición de fuerza en comparación con las otras de cantidad de materia o de cantidad de movimiento, es que el sabio presumía como intuitivos los conceptos de densidad y de fuerza, los cuales están relacionados con sensaciones como las de dureza, impenetrabilidad, esfuerzo, fatiga, etc., y trató

(6) **T. Levi-Civita e U. Amaldi:** "Compendio di Meccanica Razionale".

de ligarlos con los conceptos cinemáticos mediante un aparato matemático. Si aceptamos como intuitivos el concepto de densidad, el de cantidad de materia o masa, como decimos hoy, queda perfectamente definido, y entonces no cabe duda de que la segunda ley ("mutationem motus", etc.) define cuantitativamente la fuerza, que sólo lo estuvo cualitativamente en la definición citada.

Sin embargo, la introducción de dos conceptos intuitivos que no pueden definirse independientemente el uno del otro es una dificultad de consideración, pero: "aliquandum bonus dormitar Homerus", y también Euclides hizo uso de conceptos intuitivos. Empero hay que reconocer que el empeño en mejorar la formulación newtoniana ha estado justificado, ya que parece necesario hallar una forma que eluda aquellas nociones intuitivas. Fueron muchos los intentos que se hicieron a partir de la aparición de los "Principios", y el examen de los mismos correspondería a un estudio histórico. El hecho es que los diversos procedimientos que se propusieron para definir la masa o la fuerza independientemente de la segunda ley de Newton, no fueron satisfactorios y el enigma newtoniano siguió en pie, a pesar del enorme éxito de la teoría científica que constituye la Mecánica, hasta bien entrado el mundo en las ideas de relatividad, salvo para los que conocían la obra de Mach.

Para éste, es esencial llegar a definiciones del tipo "operacional", es decir, que permitan por medio de observaciones hallar la medida de la cantidad definida. Para definir la masa, Mach la hace corresponder simplemente a la relación de las aceleraciones recíprocas que se producen dos cuerpos en interacción; y por fuerza entiende el producto de la masa así definida por la aceleración. Así, para Mach, la correspondencia entre masa y cantidad de materia no figura en la definición; tampoco se infiere de la definición de fuerza la idea de causalidad. La causa de un movimiento no es la fuerza, sino más bien la presencia de otro cuerpo, el "motor" de Aristóteles y Santo Tomás.

Las definiciones fundadas en "cuerpos" y en sus "estados de reposo o movimiento", aunque son las únicas verificables directamente, no son susceptibles de un tratamiento matemático cómodo y elegante y no satisfacen tampoco desde el punto de vista lógico. De aquí que haya habido que introducir modificaciones para establecerlas con respecto a puntos materiales y no a cuerpos, lo cual ha requerido un ciclo de razonamiento que conduzca de las definiciones con entes ideales a las operaciones que han de realizarse con los cuerpos que existen en la naturaleza.

* * *

Nos atrevemos entonces a proponer el siguiente "tren de pensamiento" para usar una de las frases características de Mach.

El problema característico de la Mecánica es la investigación y la predicción del efecto de la acción que ejerce un cuerpo material sobre otro. Hay ocasiones en que estas acciones son obvias: pensemos por ejemplo en el efecto recíproco entre un flúido que circula por el interior de una tubería y la tubería misma, o entre las moléculas de gas dentro de un cilindro y el émbolo que impulsan. Otras lo son menos, como el que sea el piso de una carretera el que produce lo necesario para que un vehículo avance a lo largo de ella o tome las curvas que la misma contiene, o bien el que sea el Sol el cuerpo que con su presencia obliga a los planetas a girar en su torno. La manera en que dichas acciones de cuerpo a cuerpo se ejercen no influireá en el tratamiento del problema y el "hypothesis non fingo" de Newton tiene aquí amplia cabida. Bástanos el comprobar que los cuerpos de la naturaleza ejercen acciones los unos sobre los otros. Ahora bien, ¿en qué consiste una acción semejante? ¿Cómo la reconoceremos y mediremos? Aceptaremos *postulativamente* que estas acciones consisten en cambiar el estado de movimiento del cuerpo sobre el cuae se ejercen. Bajo esta forma de presentación, no sería posible el tratamiento matemático ni la formulación precisa del hecho que se postula. Por eso es preferible pensar en la acción que ejercen entre sí *dos puntos materiales*, y entender por cambio en el estado de movimiento de un punto, simplemente su aceleración, concepto éste definido cinemáticamente con relación a un cierto sistema de coordenadas. Esto supuesto, aceptaremos el

PRIMER POSTULADO

Acción de un punto material sobre otro se manifiesta por aceleraciones en ambos puntos, las cuales ocurren en sentidos opuestos, según la recta que los une.

Es obvio que no hay experiencia que permita comprobar directamente la validez de este postulado, pero sí podemos sin dificultad aceptar que él encontraría verificación si ambos puntos estuviesen aislados del resto del universo. Esta idea de una experiencia idealmente posible, pero irrealizable en la práctica, constituye una notable contribución de Mach. Una ilustración sí es posible ofrecer. Imaginemos dos lanchas unidas entre sí por una cuerda y prescindamos de los frotamientos, peso de la cuerda, etc. Si de una cualquiera de las lanchas tiramos de la cuerda de unión, observaremos aceleraciones *en ambas lanchas* en direccione opuestas. Diremos que hay acción, si se producen dichas aceleraciones. Observaremos entonces que estas aceleraciones en general no serán iguales sino que habrá una lancha qu sufrirá con mayor intensidad que la otra el efecto de tracción. Suponiendo entonces que la misma condición existiría entre dos puntos materiales diferentes, estableceremos el

La relación entre las magnitudes de las aceleraciones recíprocas que se producen entre dos puntos materiales en interacción *es una constante*.

Dicha relación no depende de la posición relativa de los puntos, ni de los propios valores que tengan las aceleraciones; ni del tiempo o de la temperatura; tampoco dependen de las velocidades relativas siempre que éstas sean pequeñas con respecto a la de la luz. (Esta salvedad es indispensable para acomodar la presente teoría a los postulados de la Relatividad.) Dich acelearción *sí depende* de la naturaleza de los puntos materiales en interacción.

Los dos postulados propuestos encuentran su expresión matemática en la siguiente ecuación:

$$a_{2,1}/—a_{1,2} = m_{1,2}$$

la cual sería válida entre dos puntos materiales que estuvieran aislados del resto del universo. En ella, $a_{1,2}$ representa la magnitud de aceleración de un cierto punto M_1 debida a la acción de un segundo punto M_2, mientras que $a_{2,1}$ representa la magnitud de la aceleración que sufre el punto M_2 bajo la acción de M_1. La constante $m_{1,2}$ caracteriza la forma de interacción entre ambos puntos materiales. Si dicha relación de aceleraciones es la unidad, es porque ambos puntos materiales ofrecen la misma resistencia al efecto de otro; si fuese por ejemplo igual a 2, el punto M_2 sufre con intensidad doble la acción de M_1 que lo que sufre este último la acción del primero. Visto de otra manera, la resistencia a la acción mecánica por el punto M_2 es la mitad de la que ofrece el punto M_1, es decir, que la inercia del primero es la mitad de la inercia del segundo.

Para continuar con el pensamiento de Mach, pero siempre en relación con puntos materiales, concibamos un tercer punto M_0 y pongámoslo en interacción primero con M_1 y luego con M_2. La experiencia ideal daría como resultado:

$$a_{1,0}/—a_{0,1} = m_{0,1}$$

$$a_{2,0}/—a_{0,2} = m_{0,2}$$

Ahor abien: es perfectamente posible que entre las tres constantes que han aparecido hasta ahora y que miden, la primera interacción entre M_1 y M_2, la segunda la interacción entre M_1 y M_0 y la tercera la interacción entre M_2 y M_0, no existiese ninguna relación. Sin embargo, aceptaremos que en nuestro universo y para velocidades pequeñas con relación a la de la luz se verifica el

TERCER POSTULADO

Entre las constantes mencionadas existe la relación

$$m_{1,2} = m_{0,1}/m_{0,2}$$

Esto indica que el resultado del experimento ideal entre M_1 y M_2 *puede predecirse* si conocemos las constantes $m_{0,1}$ y $m_{0,2}$, ya que podemos escribir

$$a_{2,1}/ - a_{1,2} = m_{0,1}/m_{0,2}$$

Por consiguiente, las constantes $m_{0,1}$ y $m_{0,2}$ medidas con relación al punto M_0 pueden emplearse para el estudio de la interacción de dos puntos materiales cualesquiera entre sí. Tomando el punto M_0 como referencia, el subíndice 0 es innecesario y la ecuación anterior puede escribirse con mayor facilidad del siguiente modo:

$$a_{2,1}/-a_{1,2}=m_1/m_2$$

Esta ecuación revela claramente lo que miden las constantes m_1 y m_2, es decir, el poder de resistir de dichos puntos al efecto de la fuerza producida por el otro, es decir, su "inercia", propiedad que haremos coincidir con la idea de "masa" y formularemos entonces la siguiente:

DEFINICION DE MASA

La medida de la masa de un punto material M es la relación entre las magnitudes de las aceleraciones recíprocas que se producirían entre dicho punto y otro punto M_0 tomado como referencia si ambos se hallasen aislados del resto del universo.

La masa aparece entonces como un concepto relativo a las características inerciales de un cierto punto material seleccionado como referencia y al cual atribuimos constantement epor comodidad la masa unidad. Así, cuando decimos que un cierto punto material tiene una masa m, esto implica que la masa de dicho punto es m veces la del punto de referencia.

Continuando con el desarrollo matemático, escribiremos la última ecuación del siguiente modo:

$$m_2\overline{a_{2,1}} = - m_1\overline{a_{1,2}} \qquad (1)$$

La rayita colocada encima de las letras $a_{1,2}$ y $a_{1,2}$ indica que se considera la cantidad vectorial aceleración, mientras que las ecuaciones anteriores se referían únicamente a la magnitud o intensidad de esta cantidad.

La ecuación (1) es de capital importancia en esta teoría; ella indica que la interacción de los puntos M_1 y M_2 se caracteriza por el hecho de que el producto de la masa de uno de ellos por su aceleración es igual al de la masa del segundo por su aceleración. Este valor común no permanecerá en general constante durante el curso de la interacción, aunque sí permanecen constantes las masas bajo las condiciones antedichas. Ahora bien: ¿qué interpretación física hemos de dar a este producto masa por aceleración? Es evidente que dada la masa de uno d elos puntos, m_2, por ejemplo, su aceleración a_2 es debida a la acción o fuerza ejercida sobre él por M_1, y que por consiguiente se ve con naturalidad la siguiente

DEFINICION DE FUERZA

La fuerza que actúa sobre un punto dado tiene por medida el producto de su masa por su aceleración.

Escrita matemáticamente esta definición hallaremos la llamada Ecuación Fundamental de la Mecánica y que para Mach implica sólo la definición cuantitativa operacional de fuerza. Importa recalcar el aspecto ideal que tiene esta definición en el sentido de que la fuerza, cuya medida es la anteriormente expresada, proviene de la acción de un segundo punto material, y su medida sería precisamente la anotada si ambos puntos estuviesen aislados del resto del universo.

Partiendo de esta definición y usando la ecuación (1) hallamos inmediatamente

$$F_{2,1} = - F_{1,2}$$

O sea, que la fuerza ejercida por el punto M_1, sobre el punto M_2 es igual por definición de fuerza a la ejercida por el segundo punto sobre el primero. Esta es la "tercera ley" del sistema Newtoniano que, como podemos ver, ha sido una mera consecuencia de los postulados y definiciones expuestos, en el entendido de que hasta ahora se ha limitado la exposición a los solos puntos materiales. La propia definición de fuerza equivale a la "segunda ley" supuesta la constancia de la masa y, por último, de la propia definición de fuerza surge la primera ley o ley de inercia.

Vemos, pues, cómo el sistema de postulados y definiciones propuesto permite deducir las leyes de Newton como consecuencias, y al eludir toda noción intuitiva antropomórfica o no medible, consolida los fundamentos de la Mecánica Newtoniana, en cuanto se refiere al punto material. Se hace ahora necesario indicar el lazo de unión entre los conceptos ideales, relacionados sólo con puntos materiales y los prácticos que se refieren a cuerpos físicos, así como deducir un procedimiento práctico que permita llegar a medir la masa de un cuerpo.

Es indudable que en el sistema propuesto no es posible la medida directa ni de las masas de los puntos que integran un determinado sistema, ni la de las fuerzas separadas de interacción que se ejercen recíprocamente entre ellos. Si podemos *medir*, para un punto determinado el efecto combinado de las fuerzas provenientes de los demás puntos materiales del sistema que estén en interacción con él, pues este efecto observable es una aceleración única $\overline{a}$ de dicho punto. Podemos entonces, de acuerdo con la definición, atribuir a dicho punto una fuerza cuya medida es $m\overline{a}$ siendo m la masa del punto. Ahora bien, si queremos distribuir esta fuerza entre los diferentes puntos materiales que la engendran tendremos que atribuir a cada uno de éstos una fuerza cuya medida sería $m\overline{a}_i$, siendo $\overline{a}_i$ la aceleración que dicho punto produciría en el seleccionado *si ambos estuviesen aislados del resto del universo*. Así, cada uno de los puntos materiales que actúan sobre uno dado se comporta como si estuviese aislado del resto de los demás, y esto por virtud de la propia definición de fuerza que obliga, para medir ésta, a que los puntos entre los cuales se ejerza se encuentren aislados. Este es el principio de la independencia de la acción de las fuerzas que pedía Euler para convalidar la demostración de la ley del paralelogramo de las fuerzas propuestas por Newton en los Principios y a la que ya se hizo referencia. En el sistema que proponemos, dicho principio es la única forma consistente con las definiciones, de atribuir a cada uno de los puntos materiales que integran un sistema, la fuerza que ejerce sobre uno dado. Aceptaremos entonces el siguiente

PRINCIPIO

En la acción simultánea de varios puntos materiales sobre un punto dado, la medida de la fuerza ejercida por uno cualquiera de aquellos sobre éste es la misma que se obtendría si se prescindiera de las acciones ejercidas por los otros puntos.

Hay que advertir que al hablar de medida de una cantidad vectorial, entendemos no sólo la intensidad de la misma sino también su dirección y sentido.

Reconstruyamos ahora, a la luz de una cinemática más clara que la poseída Newton, el razonamiento de éste para establecer la ley del paralelogramo de las fuerzas. Sean dos fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ que actúan simultáneamente sobre un cierto punto material de la masa m.

Sea a_1 la aceleración debida a la fuerza F_1 y sea a_2 la aceleración debida a la fuerza $\overline{F}_2$. Bajo la acción de la primera, suponiendo que dicha acción ocurre en un lapso infinitamente pequeño de tiempo dt, el punto sufre un desplazamiento cuya expresión vectorial sería

$$\overline{ds}_1 = \tfrac{1}{2}\,\overline{a}1\,(dt)^2$$

De igual modo la acción F_2 produce un desplazamiento

$$\overline{ds}_2 = \tfrac{1}{2}\,\overline{a}_2\,(dt)^2$$

La superposición de estos desplazamientos implica uno sólo que vale

$$\overline{ds} = \overline{ds}_1 + \overline{ds}_2$$

Por otra parte, si al desplazamiento ds corresponde una aceleración $\overline{a}$ podremos escribir

$$ds = \tfrac{1}{2}\,a\,(dt)^2$$

o sea, en definitiva que

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$$

y la simple multiplicación por m daría

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

y la construcción geométrica que implica esta ecuación vectorial es precisamente la ley del paralelogramo. En la notación vectorial, el efecto simultáneo de varias fuerzas sobre un punto material viene dado por la ecuación

$$\overline{F} = \Sigma\,\overline{F}_i$$

lo cual quiere decir que la acción simultánea de varias fuerzas, si éstas pudieran ser medidas independientemente, es equivalente a la de una sola fuerza que puede obtenerse mediante la operación matemática de sumar vectorialmente aquellas. También expresa esa ecuación que conocida la fuerza total podemos descomponer éstas en varias fuerzas, operación que en determinados casos que no nos interesa examinar aquí puede hacerse unívocamente. La ecuación fundamental de la mecánica es entonces equivalente a:

$$\Sigma \overline{F}_i = m \overline{a}$$

Esta cuación encierra toda la mecánica del punto. Su desarrollo ulterior y el deducir de ella otras leyes que hacen más cómodo y fácil es el estudio de casos especiales de la mecánica del punto, sería objeto de un tratado de mecánica y puede verse en los textos usuales. El llamado Principio de la Energía, el de D'Alembert y otros análogos entran dentro de esta categoría y pueden estudiarse como deducciones de esta misma ecuación, sin que en el proceso haya que introducir nuevos postulados. Sólo interesa hacer resaltar en esta oportunidad que dicha ecuación implica las dos importantes conclusiones que siguen:

1. Dos sistemas de fuerzas aplicados sobre *un mismo punto* ma terial tales que las fuerzas que los constituyen tengan la misma suma vectorial, producen un mismo efecto sobre el punto y son, por consiguiente, equivalentes.

2. Un sistema de fuerzas cuya suma vectorial es nula no produce aceleración en el punto material sobre el cual se aplica. El sistema de fuerzas se dice entonces que está en

EQULIBRIO,

y la condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas aplicadas a un punto material esté en equilibrio es que se verifique que:

$$\Sigma \overline{F} = 0$$

Estas dos consideraciones presentan la estática del punto material como un caso particular de la ecuación general de dinámica en la cual obligamos a ser nula la aceleración. El que la estática aparezca como un caso particular, en el caso del punto material, que es el único examinado hasta ahora, se hace posible mediante el sistema de postulados y definiciones que hemos adoptado. Un mismo grupo axiomático comprende entonces el equilibrio y el movimiento acelerado en cualquiera de sus formas.

Conviene ahora examinar las relaciones que gobiernan el movimiento de un sistema de puntos materiales cualesquiera y en particuar las que corresponden al cuerpo rígido. La deducción de estas relaciones puede también hallarse en cualquier obra de las usuales de texto. Los resultados más importantes son los siguientes:

1.—Consideremos un sistema material rígido o no rígido, sea m_i la masa de uno de los puntos que lo constituyen y $\overline{r}_i$ su vector de posición referido a un cierto origen. Definamos un punto G mediante la relación vectorial

$$\overline{r}_G \Sigma m_i = \Sigma \overline{r}_i m_i$$

Tomando dos derivadas llegaremos a la relación

$$\overline{a}_G \Sigma m_i = \Sigma \overline{a}_i m_i$$

El segundo miembro de esta ecuación representa por definición la suma de las fuerzas que actúan sobre los diversos puntos que integran el sistema; de éstas, unas son exteriores y otras son interiores. Como quiera que estas últimas son de interacción, ellas serán iguales y opuestas y por consiguiente su suma vectorial será nula. Entonces la ecuación anterior puede escribirse como sigue:

$$M \overline{a}_G = \Sigma \overline{F}_e$$

En esta ecuación, m denota la sumatoria de las m_i, o sea, la masa total del sistema, mientras que F_e denota una fuerza exterior genérica. Esta ecuación revela que el punto G se mueve como lo haría un punto material cuya masa fuera la suma de las masas de los puntos que integran el sistema y que estuviera sometido a una fuerza que tuviera por valor la suma de las fuerzas exteriores al mismo. El punto G recibe el nombre de centro de masa o centro de inercia.

La condición para que el punto G no sufra aceleración es

$$\Sigma \overline{F}_e = 0$$

O sea, una ecuación de la misma forma que la que se obtuvo para el solo punto material. Existe una diferencia entre ambos y es que la ecuación correspondiente al punto material representa condiciones que son necesarias y suficientes para el equilibrio del sistema mientras que para el sistema las condiciones que expresa dicha ecuación son sólo necesarias, ya que es posible que los puntos individuales sufran aceleraciones bajo las fuerzas aplicadas, sin que la sufra el punto G. Específicamente, la aplicación del sistema de fuerzas podría inducir una rotación alrededor del G. La investgación de esta posibilidad conduce a la segunda conclusión de este estudio somero.

2.—Partiendo de la definición de fuerza, y habida cuenta del hecho de que las fuerzas interiores son siempre iguales y opuestas se puede escribir (7).

$$\Sigma \, M_e = \frac{d}{dt} \Sigma \, (\bar{r}_i \times m_i \, \bar{v}_i)$$

En la cual $\Sigma \, M_e$ indica la suma vectorial de los momentos de las fuerzas exteriores alrededor de un cierto punto $\bar{r}_i$, m_i y $\bar{v}_i$ son respectivamente: el vector de posición, la masa y la velocidad de un punto genérico del sistema. La sumatoria ha recibido el nombre de "Cantidad angular de movimiento" y la designaremos por un vector $\bar{H}$, con lo que la ecuación anterior equivale a:

$$\bar{M}_e = d\bar{H}/dt.$$

O sea, que el momento de las fuerzas exteriores es igual a la derivada (el "Mutatio" de Newton) de la cantidad angular del movimiento. Ahora bien, para el *cuerpo sólido,* idealmente rígido se puede demostrar que el vector H es función de primer grado de la velocidad angular del sólido y que por consiguiente el cambio en esta velocidad angular dependerá del momento de las fuerzas exteriores. Si se desea que no haya cambio en dicha velocidad angular será necesario que:

$$\Sigma \, \bar{M}_e = 0$$

Por consiguiente, para que un cuerpo rígido se halle en equilibrio es necesario y suficiente que se verifique:

$$\Sigma \, \bar{F}_e = 0; \Sigma \, \bar{M}_e = 0$$

que son las ecuaciones clásicas de la Estática del sólido. Estas ecuaciones necesarias y suficientes para el sólido, no son para sistemas materiales sino necesarias; hay entonces necesidad de hacerlas suficientes por medio de las llamadas ecuaciones de condición mediante una información ulterior.

De aquí surgen las Leyes de la Elasticidad, las de Hidrostática, etcétera, que completan para los sistemas materiales, la información básica que da la Mecánica Racional.

---

(7) S. E. Vera.—Mecánica Racional, Cap. IX.

3.—Dos sistemas de fuerzas aplicadas a un sólido que tienen la misma suma vectorial de fuerzas (la misma fuerza total) y la misma suma vectorial de momentos alrededor de un punto dado 9 (momento total alrededor de dicho punto) son *equivalentes.* De aquí puede deducirse como consecuencia inmediata el principio de *Transmisibilidad de la fuerza* en el cuerpo rígido, el cual bajo la forma de presentación habitual había que considerar como postulado o principio nuevo.

Las tres conclusiones que acabamos de presentar, forman el cuerpo básico de la doctrina de la Estática del Cuerpo rígido, y dicha doctrina aparece también como caso particular de las ecuaciones más generales de la Mecánica:

$$\overline{F}_e = m\,\overline{a}_G;\ \overline{M}_e = d\overline{H}/dt$$

en las cuales se establece como condición la constancia de la velocidad de G $(\overline{a}_G = 0)$ y la de la velocidad angular del sólido. La evaluación del vector $\overline{H}$ y de su derivada, conduce a las llamadas "Ecuaciones de Euler", que están expuestas en mi obra de texto ya citada.

Para completar el tren de pensamiento iniciado con el primer postulado, veamos cómo usar las ecuaciones finales para deducir el procedimiento elemental de medida de la masa. Este procedimiento está indicado en los libros de física elemental, pero lo presentamos para recalcar la procedencia de las defeniciones y postulados fundamentales de Mach. Se observa que en el vacío y en un lugar dado de la tierra un cuerpo abandonado a sí mismo sin velocidad angular inicial desciende de manera que todos sus puntos están animados de una misma aceleración, $\overline{g}$. Por consiguiente podemos escribir:

$$\overline{F}_e = m\overline{a} = m\overline{g}$$

A la magnitud de la suma vectorial de estas fuerzas, que atribuimos a la presencia de la propia tierra la llamamos peso y observaremos que éste tiene la misma dirección de $\overline{g}$. De aquí la conocida re-

$$P = mg.$$

que permite escribir:

$$m = P/g.$$

Entonces para medir la masa basta comparar el *peso* del cuerpo cuya masa queremos medir con el *peso* de un cuerpo cuya masa hemos tomado como unidad. La relación de los pesos es la misma de las masas para un mismo lugar de la tierra. La comparación de los pesos puede hacerse entonces por los medios que enseña la Estática.

En relación con esto creo necesario aclarar una breve dificultad y es que la aceleración g que medimos en la tierra es sólo un concepto relativo, ya que a la acción de la tierra sobre el cuerpo que cae se opondría una acción de éste sobre aquella, la aceleración producida en la tierra, aunque existente de acuerdo con los postulados fundamentales, es despreciable en el más refinado experimento

El circuito descrito por el raciocinio en la Filosofía de Mach puede resumirse como sigue: la experiencia con cuerpos reales conduce con naturalidad a formular un grupo de postulados y definiciones que se verifican entre puntos materiales aislados del resto del universo. Estas definiciones y estos postulados conducen a su vez a un grupo de ecuaciones (las universales de la Mecánica), que gobiernan el movimiento de los sistemas materiales en general, cuando éstos se hallan sometidos a la acción de fuerzas engendradas por otros sistemas materiales en interacción con los primeros. Conducen también a las ecuaciones especiales de la estática del cuerpo sólido y por último justifican el procedimiento elemental de medida de la masa de un cuerpo.

Pero de esas mismas ecuaciones se han elaborado técnicas, métodos y procedimientos para el estudio de los más variados movimientos y de los más interesantes fenómenos de la naturaleza. En una palabra, el grupo de postulados y de definiciones que presentamos consolida y unifica el sistema Newtoniano, el cual, según el sentir moderno, sigue aún viviente con las modificaciones que dicta la adopción de nuevos postutlados.

La deducción a partir de los postulados modificados de Mach, de todas las ecuaciones y Principios de la Mecánica fue intentado por mí en la obra de texto ya citada. He pretendido en el presente trabajo afirmar la forma de presentación de la parte fundamental, y facilitar la deducción de las ecuaciones de la Estática haciéndolas proceder de las generales de la Dinámica. Espero haber contribuido en la medida de mi modesta habilidad al afianzamiento del sistema Newtoniano y a rendir un homenaje póstumo a Ernst Mach, creador del sistema que brinda al Newtoniano aquella base firme que fue buscada en vano por más de doscientos años.

Caracas, Septiembre de 1960.