Construcción de una Escala Continua de las Operaciones Aritméticas

Por A. ZAVROTSKY

I

En nuestro artículo "Algunas generalizaciones del concepto de campo", publicado en el Nº 28 del "Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales" (Caracas, 1946), fué definida cierta sucesión $S(x,y;n)$ de operaciones aritméticas, que depende del parámetro variable $\underline{n}$, por las siguientes reglas inductivas:

$$\begin{array}{ll} (1) & S(x,y;0')=x+y \\ (2) & S(x,y;1)=xy \\ (3) & \log S(x,y;n)=S(\log x, \log y; n-1) \end{array}$$

El logaritmo que aparece en (3) no debe ser necesariamente natural, o decimal, sino que puede tomarse a base cualquiera $b \neq 1$, de modo que el resultado de la operación $S(x,y;n)$ depende de la selección de la base $\underline{b}$ [salvo para los valores $n=0$, ó $n=1$, ya que la letra $\underline{b}$ no figura en las fórmulas (1) y (2)]. Por consiguiente, la nomenclatura completa debería ser $S_b(x,y;n)$, por tratarse de una función de 4 argumentos, de los cuales, sin embargo, $\underline{n}$ sólo puede tomar valores enteros, ya sean positivos, negativos o cero.

En las tablas que se hallan anexas al citado artículo, se ha escogido $b=2$, valor que en ciertos respectos no sólo no tiene nada que envidiar a la constante $\underline{e}$, sino que le lleva considerables ventajas. Así, v. gr., ciertos valores de $S_2(x,y;2)$ y $S_2(x,y;3)$ resultan enteros para los valores enteros de $\underline{x}$ e $\underline{y}$, lo que no sucede con $S_e(x,y;n)$. En el presente estudio, sin embargo, por los motivos que se verán más adelante, se tomará uniformemente

$$(4) \qquad b=e$$

de modo que, cuando se omita el subíndice $\underline{b}$ en $S_b(x,y;n)$, siempre se subentenderá $S(x,y;n)$ como $S_e(x,y;n)$.

II

Se pregunta ahora: ¿Se puede abolir la restricción que $\underline{n}$ sea número entero? Formalmente sí, y esto de una variedad indefinida de maneras, pues bastaría poner, por ejemplo,

$$(5) \qquad S(x,y;n)=(1-n)\,(x+y)+nxy+n(1-n)f(x,y,n),$$

pues sea cual fuere la función $f(x,y,n)$ de los 3 argumentos indicados, siempre que sea acotada en el dominio de su variación, las condiciones (1) y (2) quedan satisfechas.

Pero una selección arbitraria de la función $f(x,y,n)$ no llenaría los valiosos requisitos de grupo para cada valor constante de $\underline{n}$, y de *campo* para todo par de valores $\underline{n}$ y $\underline{n+1}$. Ya que estos conceptos desempeñan un papel fundamental en el presente estudio, merecen ser discutidos algo más detalladamente.

Empiécese por una salvedad terminológica. La expresión "requisitos" (de grupo o de campo) nos parece más adecuada que la acostumbrada "postulados" (en inglés, "assumptions"). Efectivamente, sea dado un conjunto cualquiera y cierta ley de composición de sus elementos que a todo par ordenado de los mismos subordina otro elemento bien definido. ¿Forma tal conjunto un grupo? Para contestar a esta pregunta, hay que averiguar, uno por uno, si están cumplidos los 4 requisitos del grupo, como sean: clausura, asociatividad, identidad e inversión. Y si están dadas dos operaciones diferentes, para averiguar si el conjunto forma un campo, deben comprobarse de la misma manera los once requisitos del campo. Que los números reales, por ejemplo, forman campo con respecto a la suma y a la multiplicación, no es postulado, sino teorema, que se demuestra haciendo ver que están satisfechos, uno por uno, todos los requisitos del campo. Igualmente en nuestro artículo citado más arriba no fué postulado, sino demostrado que todos los números reales mayores que $\underline{b^b}$ forman un campo bajo las operaciones $S(x,y;4)$ y $S(x,y;5)$.

Aunque en algunos tratados de álgebra el número de los requisitos del campo se eleva hasta *once*, dentro del presente sistema se puede condensarlo en *seis*. Vienen citados a continuación con ciertas restricciones que es necesario introducir si no se desea salir de los números *reales*.

Identidad. Para toda $\overline{n/}{-1}$ existe un número real I_n tal que para $\overline{x/}I_{n-2}$ se tiene $S(x,I_n;n)=S(I_n,x;n)=x$.

Inversión. Para toda $\overline{n/}{-1}$ y toda $\overline{x/}I_{n-2}$, existe una x'_n tal que $S(x,x'_n,n)=S(x'_n,x;n)=I_n$.

Clausura. Para toda $\underline{n}$ y para toda $\overline{x/}I_{n-2}$ y toda $\overline{y/}I_{n-2}$ existe un número real bien definido que se designa con $S(x,y;n)$.

Conmutatividad. Bajo las mismas hipótesis, $S(x,y;n)=S(y,x;n)$.

Asociatividad. Conservando las mismas hipótesis que para la clausura y la conmutatividad, y añadiéndoles todavía que $\overline{z/}I_{n-2}$, se tiene

$$S[S(x,y;n),z;n] = S[x,S(y,z;n);n]$$

Distributividad.

$S[S(x,y;n),z;n+1] = S[S(x,z;n+1),S(y,z;n+1);n]$, siempre que todas las expresiones comprendidas tengan sentido de acuerdo con las definiciones anteriores.

ESCOLLO. Para $\underline{n/1}$ pierden su sentido las restricciones de forma $\overline{x/}I_{n-2}$ que aparecen en estos requisitos, y las afirmaciones correspondientes deben entenderse como aplicables a todos los números reales sin excepción alguna. En particular, es fácil deducir de (1) y (2) que $I_0=0$; $I_1=1$; $x'_0=-x$; $x'_1=\frac{1}{x}$.

Desde luego, se podría aprovechar la indeterminación de la función $f(x.y,n)$ en (5) para satisfacer a todos estos requisitos. En particular, para la conmutatividad bastaría con hacerla simétrica en $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Los demás requisitos darían lugar a sendas ecuaciones funcionales. Sin embargo, parece más prometedor seguir el mismo camino esbozado en la fórmula (3), tratando solamente de suprimir la restricción que $\underline{n}$ sea número entero. El requisito de identidad define una sucesión de números reales $I_0=0$; $I_1=1$; $I_2=b$; $I_3=b^b$....... $I_n=b^{I_{n-1}}$....... Los únicos valores *enteros* de $\underline{n}$ para los que todos los números reales forman grupo cerrado bajo $S(x,y;n)$ son 0 y 1, ya que los valores menores de $\underline{n}$ infringen los requisitos de identidad y de inversión, y los mayores el de clausura, pues los números menores que I_{n-2} quedan fuera del grupo correspondiente.

En los tiempos pasados algunos matemáticos se contentaban con los requisitos de clausura y asociatividad para reconocer un conjunto como grupo (por ejemplo, Sophus Lie); pero para no introducir confusión con la acepción actual de este término, diremos que todos los números reales, sin excepción alguna esta vez, forman un semigrupo abeliano cerrado bajo $S(x,y;n)$ para todo valor entero negativo de $\underline{n}$.

Para obviar algunas de estas restricciones, se debería enriquecer el campo real con los números complejos, pero tal ensanche exigiría métodos esencialmente nuevos, en vista de la multiformidad en el campo complejo de la función logarítmica que tiene una importancia fundamental en la definición inductiva (3). Por ejemplo, se tendría formalmente $x'_{-1}=x+(2+1)\Pi i$, donde $\underline{m}$ es número entero arbitrario. Pero la discusión de este problema está totalmente fuera del objeto del presente estudio.

La fórmula (3) puede aún transcribirse en la forma equivalente

$$(6) \qquad S(x,y;n)=L^{-n}(L^n x+L^n y),$$

o aún

$$(7) \qquad S(x,y;n)=L^{-n+1}(L^{n-1}x \,.\, L^{n-1}y)$$

En ambas esta fórmula $\underline{L^n x}$ designa el $\underline{n}$-ésimo logaritmo iterado de x, de modo que, por ejemplo,

$$(8) \qquad L^1 x=\log x;\ \ L^2 x=\log(\log x)\ldots\ldots\ L^n x=\log(L^{n-1}x)\ldots\ldots$$

En virtud de (4), la letra $\underline{L}$ no significará de aquí en adelante sino el logaritmo *natural*. La definición inductiva de $L^n x$ se extiende fácilmente a los valores no positivos de $\underline{n}$, por ejemplo:

$$(9) \qquad L^{0}x=x; \; L^{-1}x=e^{x}; \; L^{-2}x=e^{e^{x}} \ldots\ldots\ldots \; L^{-n}x=e^{L^{-n+1}x} \ldots\ldots\ldots$$

La fórmula (7) es preferible a (6) en aquellos casos en que $L^{n-1}x \underline{/0}$, de modo que $L^{n}x$ daría valores imaginarios. El problema propuesto en el encabezamiento del presente ensayo sería resuelto si se pudiera dar una interprtación a la expresión $\underline{L^{n}x}$ para un valor no entero de $\underline{n}$.

III

Tal interpretación fué dada por *Abel* por medio de la función $\underline{Gx}$ definida por la ecuación funcional

$$(10) \qquad Ge^{x}=Gx+1,$$

de donde

$$(11) \qquad GLx=Gx-1,$$

Es tal vez más común la anotación $\underline{G(x)}$, pero preferimos emplear el operador $\underline{Gx}$ sin paréntesis, pues de otro modo algunas fórmulas posteriores se harían demasiados complicadas, lo cual parece autorizado por analogía con las expresiones tales como $\underline{Lx}$, de uso muy frecuente para designar al logaritmo natural, o como *sen* $\underline{x}$, *cos* $\underline{x}$, etc.

Sigue un cuadro de las expresiones analíticas tanto de la misma función $\underline{Gx}$ como de su derivada $\underline{G'x}$ en diferentes intervalos.

x	Gx	$G'x$
$-\infty$	-1	0
	$e^{x}-1$	e^{x}
0	0	1
	x	1
1	1	1

(12)		$Lx+1$	$\frac{1}{x}$
	e	2	$\frac{1}{e}$
		L^2x+2	$\frac{1}{xLx}$
	e^e	3	$\frac{1}{e^e e}$
		L^3x+3	$\frac{1}{xLxL^2x}$

. . . .

Se ve de este cuadro que $\underline{Gx}$ es continua para todo valor real $\underline{x}$, así como su derivada, la cual es, además, positiva para todo valor finito de $\underline{x}$. Naturalmente, $\underline{Gx}$ habría podido definirse partiendo de otra base de logaritmos, distinta de $\underline{e}$, y la función primitiva seguiría siendo continua, pero ya no lo sería su derivada, y ésta es la razón de la preferencia dada a los logaritmos naturales, según fué expresado en (4). La función inversa de $\underline{Gx}$ que llamaremos $\underline{Hx}$, de modo que se tiene idénticamente

$$GH = HGx = x, \tag{13}$$

satisface a la ecuación funcional

$$H(x+1) = e^{Hx} \tag{14}$$

y de aquí

$$H(x-1) = LHx. \tag{15}$$

Tanto $\underline{Hx}$ como su derivada $\underline{H'x}$ es continua en todo su dominio de definición que está dado por la desigualdad $\overline{x/}-1$. Sigue el cuadro de los valores tanto de la función primitiva como de la derivada (la cual también es siempre positiva).

	x	Hx	H'x
	—1	$-\infty$	∞
		$L(x+1)$	$\frac{1}{x+1}$
	0	0	1
		x	1
(16)	1	1	1
		e^{x-1}	e^{x-1}
	2	e	e
		$e^{e^{x-2}}$	$e^{e^{x-2}} \cdot e^{x-2}$
	3	e^{e}	e^{e+1}
		$e^{e^{e^{x-3}}}$	$e^{e^{e^{x-3}}} \cdot e^{e^{x-3}} \cdot e^{x-3}$

. . . .

Después de estas preparaciones, se puede definir

$$L^n x = H(Gx - n). \tag{17}$$

Se ve por (10), (11), (14) y (15) que para todo valor entero de n, positivo, negativo o nulo, la definición (17) coincide con (8) y (9); pero en su nueva definición $L^n x$ es función continua de cada uno de sus dos argumentos, n y x, lo mismo que cada una de sus dos derivadas parciales de primer orden, cuyas expresiones explícitas son: $(L^n x)'_x = H'(Gx - n) \cdot G'x$; $(L^n x)'_n = -H'(Gx - n)$ Sustituyendo (17) en (6), el problema de la construcción de una escala continua de las operaciones aritméticas queda totalmente resuelto por la fórmula fundamental siguiente:

$$S(x,y;n) = H\left\{G[H(Gx - n) + H(Gy - n)] + n\right\}. \tag{18}$$

En cambio, si se sustituye (17) en (7), se obtiene

(19)

$$S(x,y;n) = H\left\{G[Gx - n + 1) \cdot H(Gy - n + 1)] + n - 1\right\}.$$

La fórmula (19) proporciona los mismos resultados numéricos que (18) dondequiera ambas son aplicables, pero (19) puede aplicarse con más comodidad aún en aquellos casos en que el uso de (18) ofrece dificultades, a saber cuando

$$Gx+1 \leqq n \leq Gx+2, \quad \text{ó} \quad Gy+1 \leqq n \leq Gy+2.$$

I V

Procédase ahora, primero, a averiguar si la definición (18) [o su equivalente (19)] satisface a los 6 requisitos del campo enumerados más arriba, pero ya sin ceñirse a los valores enteros de n y luego a un estudio independiente de $S(x,y;n)$ como función de tres argumentos reales.

Identidad. Efectivamente, basta con tomar $I_n = Hn$, porque

$$S(Hn,x;n) =$$

[por (13)]

$$= H\{G[H(GHn-n) + H(Gy-n)] + n\} = H\{G[HO + H(Gy-n)] + $$
$$+ n\} = H\{G[H(Gy-n)] + n\} = H(Gy-n+n) = y.$$

Análogamente se demuestra que $S(x,Hn,n) = x$ para todo valor real de $n \not< -1$.

Inversión. Efectivamente, basta con poner

$$x'_n = H\{G[-H(Gx-n)] + n\}, \tag{20}$$

porque

$$S(x,x'_n;n) = H\{G[H(Gx-n) - H(Gx-n)] + n\} = H(GO+n) = Hn = I_n$$

por lo demostrado. Análogamente se comprueba que $S(x'_n,x;n) = I_n$ En particular, $x'_0 = -x$; $x_1 = \dfrac{1}{x}$, como era de prever. Para $n \leqq -1$ la inversión es imposible sin abandonar el campo real, aunque (20) da formalmente el resultado $x'_{-1} = x + (2m+1)\,\Pi$, enunciado más arriba.

Clausura. La condición necesaria y suficiente para que (19) tenga sentido y traiga como respuesta un número real bien definido es $x/H(n-2)$; $y/H(n-2)$. En este caso, y sólo en este caso, el 2º miembro de (19) puede calcularse por medio de los cuadros (12) y (16).

En cambio, el uso de (18) ofrece dificultades para $x/\underline{\underline{H}}(n-1)$ o para $y/\underline{H}(n-1)$.

Conmutatividad. $S(x,y;n)=H\{G[H(Gx-n)+H(Gy-n)]+n\}=$ $=H\{G[H(Gy-n)+H(Gx-n)]+n\}=S(y,x;n)$, como queríamos demostrar.

Asociatividad. $S[S(x,y;n),z;n]=H\{G[H(Gx-n)+H(Gy-n)+$ $+H(Gz-n)]+n\}=S[x,S(y,z;n);n]$ lo que queríamos demostrar Una vez deducida esta propiedad, se podrá introducir, sin peligro de ambigüedad, el símbolo $S(x,y,z;n)$ y aún extender su uso a un número cualquiera de elementos, como $S(x_1, x_2 \ldots x_k;n)$.

Distributividad. Por (19) se tiene

$$S[S(x,y;n),\ z;n+1]=H\{G[(H\overline{Gx-n}+H\overline{Gy-n})\ .\ H(Gz-n)]+n\}=$$

$$=H\{G[H(Gx-n)\ .\ H(Gz-n)+H(Gy-n)\ .\ H(Gz-n)]+n\}.$$

Pero por (18) esta última expresión equivale a

$$S\{H[G(H\overline{Gx-n}\,.\,H\overline{Gz-n})+n],H[G(H\overline{Gy-n}\,.\,H\overline{Gz-n})+n];n\}.$$

Por otra parte, por (19),

$$H[G(H\overline{Gx-n}\,.\,H\overline{Gz-n})+n]=S(x,z;n+1),$$

y $H[G(H\overline{Gy-n}\,.\,H\overline{Gz-n})+n]=S(y,z;n+1)$, de modo que el resultado final es $S[S(x,z;n+1), S(y,z;n+1);n]$, lo que queríamos demostrar.

V

Volviéndonos ahora al estudio de la variación de la función $S(x,y;n)$ de sus 3 argumentos, vemos por (18) que es continua en cada uno de ellos por serlo las funciones $\underline{Gx}$ y $\underline{Hx}$ que la componen. Lo mismo puede decirse de sus tres derivadas parciales de primer orden, cuyas expresiones explícitas son las siguientes

(21)

$$S'_x=H'\{G[H(Gx-n)+H(Gy-n)]+n\}.G'[H(Gx-n)+$$

$$+H(Gy-n)].H'(Gx-n).G'x;$$

(22)

$$S'_y = H'\{G[H(Gx-n)+H(Gy-n)]+n\}.G'[H(Gx-n)+$$
$$+H(Gy-n)].H'(Gy-n).G'y;$$

(23)

$$S'_n = H'\{G[H(Gx-n)+H(Gy-n)]+n\}.\{1-G'[H(Gx-n)+$$
$$+H(Gy-n)].[H'(Gx-n)+H'(Gy-n)]\}.$$

Ya que $\underline{G'x}$ y $\underline{H'x}$ son por lo visto siempre positivos y nunca se anulan, también S'_x y S'_y, siendo productos de factores todos positivos, son siempre $\overline{/}0$, de modo que $S(x,y;n)$ es función monótona creciente de $\underline{x}$ cuando $\underline{y}$ y $\underline{n}$ permanecen constantes, y de $\underline{y}$, cuando $\underline{x}$ y $\underline{n}$ quedan constantes. En cambio si S'_x y S'_y se calculan a partir de (19) en vez de (18), se ve que S'_x tiene el signo de $Gy-n+1$, y S'_y el de $Gx-n+1$ Esto quiere decir que en aquellos casos excepcionales que fueron discutidos más arriba en el final del parágrafo III, en que la fórmula (19) es aplicable y (18) no, si por ejemplo, $H(n-2\underline{/}y\ \underline{/}H(n-1)$ $S(x,y;n)$ es función monótonamente decreciente de $\underline{x}$. En el cuadro anexo de $S(x,y;\sqrt{2})$ este caso se ofrece en la columna correspondiente a $y=0$. Si $y=H(n-1)$, $S(x,y;n)=y$ idénticamente y no depende de $\underline{x}$ del todo. En todos los demás casos se puede afirmar que $S(x,y;n)$ es función monótona de $\underline{x}$, cuando $\underline{y}$ y $\underline{n}$ permanecen constantes, y de $\underline{y}$, cuando $\underline{x}$ y $\underline{n}$ permanecen constantes.

Lo mismo puede decirse de la "derivada diagonal" $S'_x(x,x;n)$ pues poniendo $x=y$ en (18), se tiene $S(x,x;n' = H\{G[2H(Gx-n)]+ +n\}$, de donde

(24)

$$S'_x(x,x;n) = H'\{G[2H(Gx-n)]+n\}.G'[2H(Gx-n)].$$
$$.2H'(Gx-n).G'x,$$

expresión que es siempre positiva. En cambio, (19) da $S(x,x;n) = =H\{G[H^2(Gx-n+1)]+n-1\}$, de donde

(25)

$$S'_x(x,x;n) = H'\{G[H^2(Gx-n+1)]+n-1\}\ .\ G'[H^2(Gx-n+1)]$$
$$.\,2H(Gx-n+1)\ .\ H'(Gx-n+1)\ .\ G'x,$$

expresión cuyo signo coincide con el de $H(Gx-n+1)$, y por consiguiente con el de $Gx-n+1$, ya que el signo de $\underline{Hx}$ es siempre el mismo que el de x, según puede verse del cuadro (16). A esto se debe el hecho de que en la tabla anexa de $S(x,y;II)$, $S(3,3;II)$ $\underline{/}S(2,2;II)$, pero $S(4,4;II) \overline{/} S(3,3;II)$. De la misma manera, en la expresión de S'_n la segunda llave tanto puede tomar valores positivos como negativos y nulos, y por consiguiente, cuando $\underline{x}$ e $\underline{y}$ permanecen constantes, $S(x,y;n)$ puede ser función creciente o decreciente de $\underline{n}$, y puede tener sus valores extremales. Esto se confirma aún por los ejemplos elementales, pues existen pares de números reales $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tales que $x+y\underline{/}xy$, y otros pares tales que $x+y\overline{/}xy$, ó $x+y=xy$. A la luz de (1) y (2), esto significa que $S(x,y;0)$ puede ser mayor, igual o menor que $S(x,y;1)$. El estudio directo de los máximos y mínimos de $S(x,y;n)$ se complica algo por la discontinuidad de las segundas derivadas de $\underline{Gx}$ y de $\underline{Hx}$ visible en los cuadros (12) y (16), y por lo tanto de las derivadas parciales de segundo orden de $S(x,y;n)$; con todo, se puede demostrar que para todo par de valores constantes de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$ existe *al menos* un valor de $\underline{n}$ que reduce la función $S(x,y;n)$ a su máximo. He aquí la demostración.

Para fijar mejor las ideas, supóngase $x \overline{\overline{/}} y$, con lo cual no se pierde la generalidad en vista de la conmutatividad ya demostrada de la operación $S(x,y;n)$ en $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Démosle primero a $\underline{n}$ un valor entero negativo muy fuerte en valor absoluto que precisaremos más tarde. Para $\underline{n}$ entera, la definición (18) se reduce a (6) y se tiene:

$$S(x,y;n)=L^{-n}(L^n x+L^n y)\,\underline{\underline{/}}\,L^{-n}(2L^n x)=$$

$$=L^{-n-1}(L2+L^{n+1}x)\,\underline{\underline{/}}\,L^{-n-1}(L^{n+1}x+1)=L^{-n-1}[L^{n+1}x(1+\frac{1}{L^{n+1}x})]=$$

$$=L^{-n-2}[L^{n+2}x+L(1+\frac{1}{L^{n+1}x})]\,\underline{/}\,L^{-n-2}(L^{n+2}x+\frac{1}{L^{n+1}x})\,\underline{/}\,L^{-n-2}(L^{n+2x}+G),$$

pues por pequeño que sea el número $G\overline{/}0$, escogido de antemano, siempre se puede hacer $n\underline{/}Gx-G\frac{1}{G}-1$ para que $\frac{1}{L^{n+1}x}\underline{/}G$. Pero esto quiere decir que se puede siempre tomar para n un valor entero negativo suficientemente fuerte en valor absoluto para que $S(x,y;n)$ difiera de x (necesariamente por exceso) tan poco como se quiera. Es imposible hacer crecer a n por valores *positivos* ilimitados, pues para $n \geqq Gy+2$, $H(Gy-n)$ en (19) adquiere valores imaginarios. Pero poniendo $n=Gy+1$, se tiene

$$S(x,y;Gy+1)=H\{G[H(Gx-Gy-1)+H(-1)]+Gy+1\}=$$
$$=H[G(-\infty)+Gy+1]=H(-1+Gy+1)=y.$$

Igualmente, poniendo $n=Gy$, se tiene

$$S(x,y;Gy)=H\{G[H(Gx-Gy)+HO]+Gy\}=H(Gx-Gy+Gy)=x,$$

y poniendo $n=Gy-1$,

$$S(x,y;Gy-1)=H\{G[H(Gx-Gy+1)+H1]+$$
$$+Gy-1\} \geqq H\{G[H(Gx-Gy+1)]+Gy-1 =x,$$

o en otros términos, siendo x e y constantes, $S(x,y;n)$ crece cuando n varía desde un valor entero negativo, muy fuerte en valor absoluto, hasta $Gy-1$, y decrece cuando n varía desde $Gy-1$ hasta Gy, y siendo por lo demostrado continua, debe tener *al menos* un valor máximo, lo que queríamos demostrar.

VI

Por cierto, este máximo no debe necesariamente ser único, y vamos a aducir un ejemplo numérico, en que, además de este máximo aparecerá también un mínimo. Es la variación de la función $S(2,2;n)$

n	S(2,2;n)	Observaciones
0	4	O sea, $2+2=4$
	$(4e^{-n})^{e^n}$	
L4—1	$e^{e^{\frac{4}{e}}}$	

	$e^{\frac{4}{e}}$	Valor máximo constante en todo el intervalo $L4 - 1 \leq n \leq L2$
L2	$e^{\frac{4}{e}}$	
	$e^{2(L2+1-n)e^{n-1}}$	En particular, si $n=1$, se obtiene e hecho trivial de que $2 \,.\, 2 = 4$
$L2 + \frac{1}{2}$	$e^{2e^{-\frac{1}{2}}}$	
	$e^{4e^{-n}}$	
L4	e	
	$4e^{1-n}$	
$L2 + 1$	2	
	$e^{n-2+(L2+2n)^2}$	En este intervalo, para $n = L2 + \frac{3}{2}$, está contenido el mínimo igual a $2e^{-\frac{1}{4}}$

. . . .

Mientras el valor mínimo de $S(2,2;n)$ corresponde al punto bien determinado $n = L2 + \frac{3}{2}$, esta función conserva su valor máximo constante en todo el intervalo $L4 - 1 \leq n \leq L2$. Esta particularidad se debe a la discontinuidad ya señalada de las segundas derivadas de <u>Gx</u> y de <u>Hx.</u> Fácil sería cerciorarse directamente de que lo mismo acontece en el caso algo más general de $S(x,x;n)$ que alcanza su máximo igual a $H(Gx+L2)$ en todo el intervalo $Gx - 2 + L2 \leq n \leq Gx - 1$, y un mínimo igual a $H(Gx - \frac{1}{4})$ en único punto $n = Gx + \frac{1}{2}$.

Siguen las tablas pitagóricas de las operaciones $S(x,y;\frac{1}{2})$, $S(x,y;\sqrt{2})$ y $S(x,y;\Pi)$, como muestra de un valor fraccionario de <u>n,</u> otro irracional y otra trascendente. Cierta irregularidad aparente de las segundas diferencias que se observa en estas tablas, se debe a la misma discontinuidad de las segundas derivadas de las funciones <u>Gx</u> y <u>Hx</u> ya varias veces señalada.

S(x,y;½)

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	—0,28768	+0,32436	1,02011	1,84353	2,62553	3,28228	3,96590	4,73019	5,57898	6,45164	7,33292
1	+0,32436	1,64872	2,82646	4,10041	5,41440	6,64314	7,75794	8,85982	9,95282	11,05944	12,12051
2	1,02011	2,82646	4,35584	6,20058	7,88398	9,29666	10,56217	11,80042	13,01981	14,22385	15,41602
3	1,84353	4,10041	6,20058	8,34969	10,22754	11,78543	13,16982	14,49332	15,84230	17,18297	18,54656
4	2,62553	5,41440	7,88398	10,22754	12,25208	13,91991	15,39562	16,85895	18,33406	19,83813	21,36212
5	3,28228	6,64314	9,29666	11,78543	13,91991	15,67358	17,28857	18,86305	20,47616	22,11050	23,76931
6	3,96590	7,75794	10,56217	13,16982	15,39562	17,28857	18,98034	20,69858	22,43063	24,18800	25,96898
7	4,73019	8,85982	11,80042	14,49332	16,85895	18,86305	20,69858	22,53668	24,39051	26,26598	28,16761
8	5,57898	9,95282	13,01981	15,84230	18,33406	20,47616	22,43063	24,39051	26,36377	28,35907	30,38104
9	6,45164	11,05944	14,22385	17,18297	19,83813	22,11050	24,18800	26,26598	28,35907	30,47420	32,61676
10	7,33292	12,12051	15,41602	18,54656	21,36212	23,76931	25,96898	28,16761	30,38104	32,61676	34,88026

S(x,y;Π)

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,70022	0,14526	—0,09259	—0,27148	—0,38830	—0,46740	—0,53034	—0,58225	—0,62492	—0,66162	—0,69202
1	0,14526	0,75736	1,20739	1,74935	2,20744	2,56774	3,05197	3,43989	3,85524	4,30022	4,77718
2	—0,09259	1,20739	2,64344	4,02733	6,06621	7,62563	9,15075	10,67588	12,20101	13,72613	15,25137
3	—0,27148	1,74935	4,02733	7,82573	10,46372	13,98726	16,81739	19,82799	23,04605	26,48107	30,14195
4	—0,38830	2,20744	6,06621	10,46372	15,82402	20,16905	24,84244	29,96412	35,55891	41,65127	48,26557
5	—0,46740	2,56774	7,62563	13,98726	20,16905	26,25706	32,56141	40,11098	48,65558	57,78866	67,83795
6	—0,53034	3,05197	9,15075	16,81739	24,84244	32,56141	42,95272	52,20213	63,48137	76,57149	90,89231
7	—0,58225	3,43989	10,67588	19,82799	29,96412	40,11098	52,20213	65,75232	81,17891	98,60952	117,78209
8	—0,62492	3,85524	12,20101	23,04605	35,55891	48,65558	63,48137	81,17891	102,33416	123,58353	148,06016
9	—0,66162	4,30022	13,72613	26,48107	41,65127	57,78866	76,57149	98,60952	123,58353	151,26826	181,71316
10	—0,69202	4,77718	15,25137	30,14195	48,26557	67,83795	90,89231	117,78209	148,06016	181,71316	218,69942

S(x,y;∛2)

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	5,16313	3,27446	2,82368	2,61488	2,48561	2,39569	2,32873	2,27647	2,23426
3	—	—	3,27446	3,17361	3,13245	3,10697	3,08900	3,07538	3,06454	3,05563	3,04811
4	—	—	2,82368	3,13245	3,29445	3,40629	3,49106	3,55888	3,61514	3,66206	3,70470
5	—	—	2,61488	3,10697	3,40629	3,63219	3,80145	3,94614	4,06957	4,17723	4,27245
6	—	—	2,48561	3,08900	3,49106	3,80145	4,05597	4,27236	4,46092	4,62827	4,77887
7	—	—	2,39569	3,07538	3,55888	3,94614	4,27236	4,55561	4,80683	5,03311	5,23937
8	—	—	2,32873	3,06454	3,61514	4,06957	4,46092	4,80683	5,11814	5,40209	5,66377
9	—	—	2.27647	3,05563	3,66206	4,17723	4,62827	5,03311	5,40209	5,74246	6,05880
10	—	—	2,23426	3,04811	3,70470	4,27245	4,77887	5,23937	5,66377	6,05880	6,42959