NOTA SOBRE LA INTEGRACION DE LA FUNCION DE LOMMEL

Por: R. S. DAHIYA

1) La ecuación integral

$$(1.1) \qquad \phi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx, \quad R(p) > o$$

representa la transformación clásica de Laplace de una variable y las funciones $\phi(p)$ y $f(x)$ relacionadas por (1.1) se dice están relacionadas operacionalmente una a otra. $\phi(p)$ es llamada la imagen y $f(x)$ la primitiva.

Podemos escribir simbólicamente.

$$(1.2) \qquad \phi(p) \doteqdot F(x) \text{ or } f(x) \doteqdot \phi(p),$$

y el símbolo $\doteqdot$ se llama operacional.

El objeto de la presente nota es evaluar las integrales que contienen la función de Lommel (véase [1], pág. 372) usando el cálculo operacional.

2) Teorema principal: si se supone

(i) $\phi(p) \doteqdot h(x)k(x)$,

(ii) $ph(\sqrt{p}) \doteqdot g(x)$,

(iii) $pg(p) \doteqdot f(x)$,

(iv) $\psi(p,y) \doteqdot \dfrac{k(x)}{x^2+y}$,

será

$$(2.1) \qquad \phi(p) = \int_0^\infty f(y)\psi(p,y)dy,$$

siempre que sea permitido un cambio en el orden de la integración.

Demostración: De (i) y (ii) tenemos

$$(2.2) \qquad \phi(p)=p\int_0^\infty e^{-px}\,h(x)\;k(x)\;dx$$

y

$$(2.3) \qquad h(\sqrt{p})=\int_0^\infty e^{-px}\;g(x)\;dx$$

usando ahora (2.3) en (2.2), obtenemos

$$(2.4) \qquad \phi(p)=p\int_0^\infty e^{-xp}k(x)\left[\int_0^\infty e^{-x^2t}\;g(t)\;dt\right]dx$$

Interpretando con ayuda de (iii), tenemos

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-px}\;k(x)\left[\int_0^\infty e^{-x^2t}\left\{\int_0^\infty e^{-yt}\;f(y)\;dy\right\}dt\right]dx$$

Cambiando el orden de la integración, resulta

$$(2.5) \qquad \phi(p)=p\int_0^\infty e^{-px}\;k(x)\left[\int_0^\infty f(y)\left\{\int_0^\infty e^{-(x^2+y)t}\;dt\right\}dy\right]dx$$

$$=p\int_0^\infty e^{-px}\;k(x)\left[\int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y}\;dv\right]dx$$

$$=\int_0^\infty f(y)\left[p\int_0^\infty e^{-px}\frac{k(x)}{x^2+y}\,dx\right]dy$$

$$\phi(p)=\int_0^\infty f(y)\;\psi(p,y)\;dy, \qquad \text{por (IV)}.$$

Esto completa la demostración del Teorema.

3) Integrales de la función de Lommel.

Supongamos $h(x)=\exp(x^2/4)\;D_{-\mu}\;(x)$ y $k(x)=x^\nu$.

$$h(x)k\;(x)=x^\nu\exp(x^2/4)D_{-\mu}(x)\doteqdot p^{\mu-\nu}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{[\mu]2r}{r!}$$

$$\Gamma\ (\nu-2r-\mu+1)\ (-\frac{p^2}{2})^r=\phi(p)$$

(Véase [1], resultado (1), pág. 210)

$$ph(\sqrt{p})=pe^{p/4}D_{-\mu}(\sqrt{p})\doteqdot\frac{x^{\mu/2-1}(x+1/2)^{-\mu/2-1/2}}{2^{\frac{\mu+1}{2}}\Gamma\ (\mu/2)}\equiv g(x)$$

(Véase [1], resultado (20), pág. 139)

$$pg(p)=\frac{1}{2^{\frac{\mu+1}{2}}\Gamma\ (\mu/2)}\cdot\frac{p^{\mu/2}}{(p+1/2)^{-\frac{\mu+1}{2}}}\doteqdot\frac{\Gamma\frac{(1-\mu)}{2}e^{-x/4}}{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu/2)\pi}\cdot$$

$$.[D_{\mu-1}\ (-\sqrt{x})-D_{\mu-1}(\sqrt{x})]\equiv f(x)$$

(Véase [1], resultado (4), pág. 210)

$$\frac{K(x)}{x^2+y}=\frac{x^\nu}{x^2+y}\doteqdot\pi\ \operatorname{cosec}\ [(\nu+1)\pi]y^{\frac{\nu-1}{2}}\ p\ V_{\nu+1}\ (2\sqrt{yp},o)\equiv\psi(p,y)$$

(Véase [1], resultado (9), pág. 138)

Luego de (2.1) se obtiene

(3.1)

$$\int_0^\infty y^{\frac{\nu-1}{2}}\ \exp(-\frac{y}{4})\ [D_{\mu-1}(\sqrt{y})-D_{\mu-1}(\sqrt{y})]V_{\nu+1}(2\sqrt{yp},o)dy$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{\mu}{2})2^{\mu+1/2}p^{\mu-\nu-1}}{\Gamma(\frac{1-\mu}{2})\ \operatorname{cosec}\ [(\nu+1)\pi]}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{(\mu)2r}{r!}\ \Gamma(\nu-2r-\mu+1)\ (-\frac{p^2}{2})^r,$$

$2>\ \operatorname{Re}(\nu)>-1$

De modo similar, si consideramos el par $\{h(x), k(x)\}$ como:

$$h(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}x^{-2}\log x \\ x^{\nu-2}k_\nu(2\sqrt{ax}) \\ \dfrac{1}{x(x+a)} \end{cases} \text{ and } k(x) = \begin{cases} x^{n+1} \\ x^{\mu-\nu+2} \\ x^{\nu+1} \end{cases}$$

y según la técnica dada en (3.1), luego llegamos a los siguientes resultados

(3.2)

$$\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} \log y \; V_{n+2}(2\sqrt{yp},o)\, dy = \frac{2\Gamma(n+1)}{p^{n+1} \operatorname{cosec}[(n+2)\pi]}$$

$[\psi(n+1) - \log p]$, $|\operatorname{Re}(n)| < 1$.

(3.3)

$$\int_0^\infty Y^{\frac{\mu-1}{2}} J_\nu(2\sqrt{ay})\, V_{\mu-\nu+3}(2\sqrt{yp},o)\,dy = -\frac{2\sin(\mu\pi)\sin[\mu-\nu+3)\pi]}{\pi \sin[(\mu+\nu)\pi]}$$

$$\frac{\Gamma(\mu-\nu+1)}{(p^2-4a)^{\frac{\mu+1}{2}}} Q_\mu^\nu\left(\frac{p}{\sqrt{(p^2-4a)}}\right);$$

$\operatorname{Re}(p) > 2a$, $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1$, $o < \operatorname{Re}(\nu) < 7/2$, $\operatorname{Re}(\nu-\mu) > o$.

(3.4)

$$\int_0^\infty \frac{Y^{\frac{\nu-1}{2}}}{y+a^2} V_{\nu+2}(2\sqrt{yp},o)\,dy = \frac{\Gamma(1+\nu)\, a^{\frac{\nu-3}{2}} \exp\left(\frac{ap}{2}\right)}{\operatorname{cosec}[(\nu+2)\pi]\, p^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$$W_{-\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}}(ap),$$

$|\operatorname{Re}(\nu)| < 1$.

1. Erde'lyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi; Tables of Integral Transforms. Vol. 1 (1954). Bateman Project. McGraw-Hill book company, inc.