UN RESULTADO EN COLORACION

Por: ARNOLDO J. MAAL
Departamento de Matemáticas
Universidad de Carabobo

THE AUTHOR WILL MAIL AN ENGLISH TRASLATION OF THIS PAPER TO ALL INTERESTED READERS THAT ASK FOR ONE.

El principal objetivo de este trabajo es probar que no existe ciclo, frontera de una cara de un grafo plano, con número cromático mayor de 3.

SUMARIO:

En este trabajo sólo consideramos grafos finitos no dirigidos, sin lazos ni lados múltiples.

El teorema tiene un Lema 1, probado por reducción al absurdo, usando el teorema de Headwood (1, 12.7, p. 130) para fijar como absurdo un grafo planar con un número cromático de seis.

El resto del teorema se prueba por inducción.

DEFINICIONES:

La terminología y notación son tomados del libro Graph Theory, del Prof. F. Harary (1, p. 8 y 102).

Una coloración de un grafo, es una asignación de colores para los puntos del grafo, de manera que cada punto tenga un solo color y no existan dos puntos adyacentes con el mismo color.

Una n coloración usa n colores diferentes. En este trabajo, v_i($i=1$, 2, 3, 4, 5, 6) indica un vértice (nombre de los puntos de un grafo plano) coloreado con el color i, y el uso de v_5, por ejemplo, significa que 4 otros colores diferentes han sido ya usados.

P_{ij} es un sendero (1, p. 13) formado únicamente por vértices coloreados i ó j.

C_n es un ciclo (1, p. 13) con n vértices, frontera o límite de la cara F en el grafo plano G.

χ es el número cromático [1, p. 126] o el mínimum m para el cual es posible una coloración que use sólo m colores diferentes.

$\chi(C_n)$ es el mínimum m para el cual una coloración con sólo m colores diferentes de C_n es posible, tal que χ (G) no aumente de valor.

En este trabajo, dos puntos v_i y v_j se dicen conectados únicamente si la línea $y=(v_i, v_j)$ o el sendero P_{ij} que incluye tanto v_i como v_j existen.

a) Conviene notar que si en cualquier grafo coloreado dos puntos cualesquiera, digamos w_i y v_j no están conectados, w_i y todos los puntos coloreados i ó j conectados con w_i pueden intercambiar colores, y v_j y todos los puntos coloreados i ó j, conectados con v_j pueden permanecer del mismo color que antes.

Cuando nosotros decimos que el punto v_j cambia su color para el color i, se entiende que todos los puntos coloreados j ó i en G intercambian colores si están conectados con v_j.

Teorema 1.

$$\chi\ (C_n) \leqslant 3$$

b) Nótese que es una premisa del Teorema 1 que G no contiene ningún lado embebido en F, adyacente a cualquier vértice de C_n, porque en ese caso F no está limitada por C_n.

PRUEBA

Es trivial que un ciclo puede tener $\chi=2$ ó 3 [1, p. 127].

Consideraremos primero el Lema 1.

Lema 1.

$$\chi\ (C_n) < 5$$

Si el lema es falso, existe un grafo G con un ciclo C_n, coloreado de tal manera que $\chi(C_n)=5$.

Consideremos el grafo H, igual que G pero con uno o más vértices W embebidos en todas las caras F de G, limitadas por un ciclo con 5 o más puntos.

W es adyacente con todos los puntos del ciclo correspondiente que limita su cara.

Es claro que H también es plano.

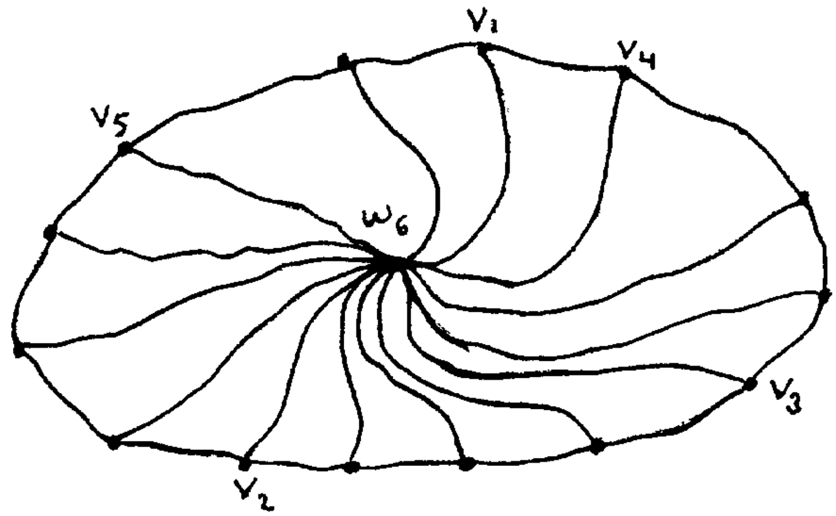

FIGURA 1

Si G tiene 5 colores en alguno de sus ciclos, H tiene $\chi(H)=6$, ya que el punto correspondiente w debe ser coloreado con el color 6, lo cual es absurdo, y por consiguiente ni G ni H tienen ciclo con $\chi(C_n)=5$ y el lema está probado. Ver figura 1.

Queda por probar que ninguna cara de un grafo plano puede ser limitada por un ciclo que tenga $\chi(C_n)=4$. Ello será probado por inducción. Primero lo probaremos para $n=3$ y $n=4$.

CASO 1.

$$\chi\ (C_3)\ <\ 4$$

Como C_3 sólo tiene 3 vértices, sólo 3 colores son necesarios, ya que cada vértice usa sólo un color.

CASO II

$$\chi\ (C_4)\ <\ 4$$

Si $\chi(C_4)=4$, necesariamente cada vértice de C_4 se colorea con un color diferente.

Si el vértice v_1 no está conectado con el vértice v_3 por una o varias líneas que pertenecen a G, v_3 puede ser coloreado 1 y $\chi(C_4)<4$, entonces es necesario asumir que v_1 está conectado con v_3 (ver fig. 2) y por la premisa b), dicha conexión no está embebida en F (F está limitada por C_4).

c) Como puede verse examinando la figura 2, v_2 no puede estar conectada con v_4 por un $P_{2,4}$ que pertenezca a G, por lo menos una de las líneas que conectan v_2 con v_4 está embebida en F_1 y v_4 es exterior a F_1 y un corolario del Teorema de Jordan, nos indica que si dos vértices en caras diferentes se unen, se produce un cruce de la frontera entre ambas caras, y siendo G plano, no existe en G ningún cruce, luego v_2 no está conectada con v_4.

De a) y c) deducimos que v_2 puede colorearse 4 y que el color 2 es eliminado de C_4, $\chi(C_4)<4$.

Si la conexión entre v_1 y v_3 fuera la línea:

$y=(v_1,v_3)$ el mismo razonamiento es válido.

d) Nótese que al cambiar v_2 a v_4, la coloración de otros posibles ciclos en G que contengan al vértice v_2, ahora v_4 cambia, pero únicamente en los colores que usa, no hay aumento en el número de diferentes colores, porque todos los otros vértices 4 en F_1 son cambiados a 2.

También $\chi(G)$ no cambia, ya que ambos colores envueltos en el cambio estaban originalmente en G.

Ahora, suponemos que todo C_{n-1}, frontera de la cara F tienen $\chi(C_{n-1})<4$ y probaremos que todo C_n, frontera de F tienen también $\chi(C_n)<4$.

Si la hipótesis inductiva es falsa, n es el menor número para el cual $\chi(C_n)=4$ y $\chi(C_{n-1})<3$.

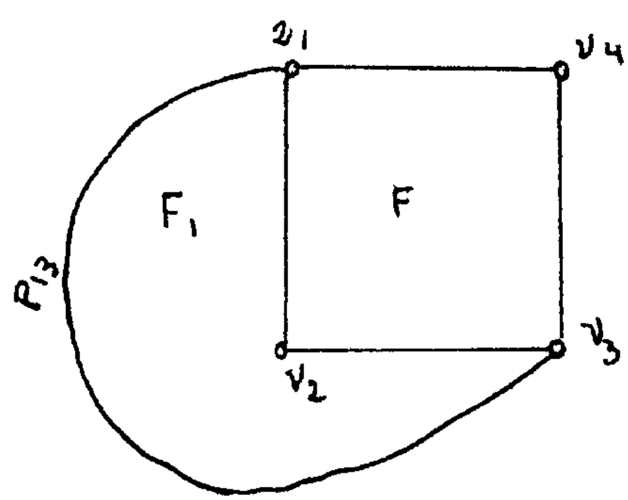

FIGURA 2

Lema 2.

Si $\chi(C_n)=4$, necesariamente un sub-grafo de C_n es un sendero con por lo menos 4 vértices, que principia en el vértice v_i y termina en el vértice v_j.

También P_{ij}, incluyendo ambos v_i y v_j existe en G.

La prueba es como sigue:

Por simplicidad, sin perder generalidad usaremos números por los colores:

v_4 necesariamente está conectada con un no adyacente vértice v_i y entre v_4 y v_i hay más que un vértice, porque: Si fuera sólo uno, digamos W_1 entre v_4 y v_3, $P_{3,4}$ o $y=(v_3v_4)$ aisla W_1 de v_2, el otro vértice de C_n adyacente con v_4. (ver fig. 3).

En consecuencia, W_1 puede colorearse 2. Entonces v_4 debe estar conectado con otro vértice, coloreado 1, si con W'_1, v_2 está aislado por $P_{4,1}$ o $y_1=(v_4,W'_1)$ de v_3, luego v_2 puede cambiar a 1. Luego v_4 debe estar conectado con otro vértice coloreado 1 para cualquier vértice que escojamos, hay más de un vértice entre ellos.

Eso prueba el Lema 2.

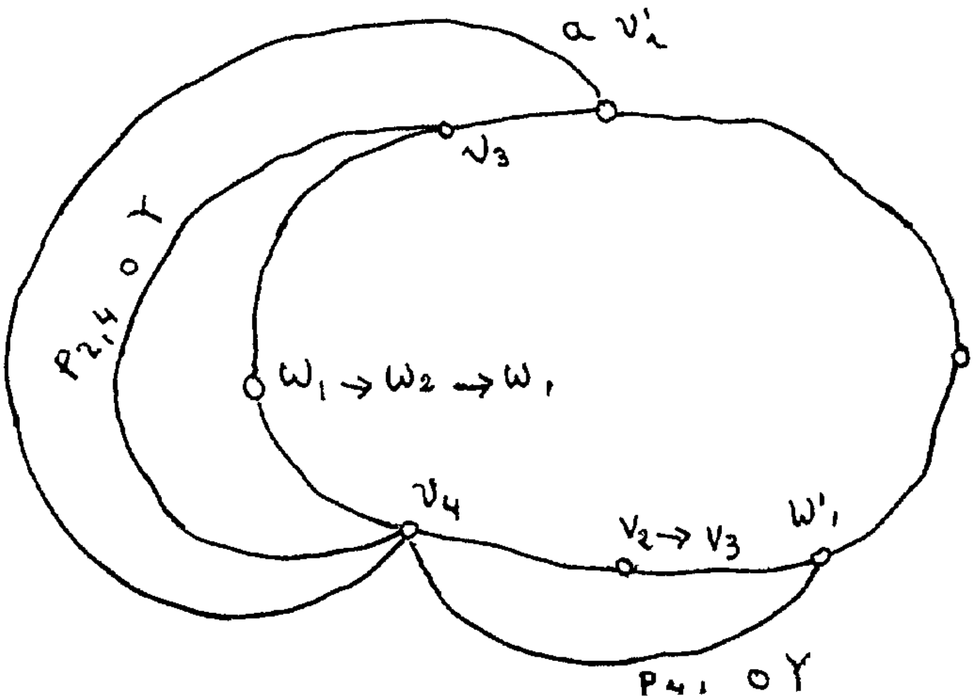

FIGURA 3

Para la inducción, consideraremos los dos casos posibles:

CASO 1

v_i está conectado con v_j por $y = (v_i, v_j)$.

Formamos el grafo G', añadiendo a G el vértice v_q y los radios $X_1 = (v_q, v_i)$ y $X_2 = (v_q, v_j)$.

Entonces G' tiene las caras F_1 y F_2 en lugar de F, F_1 cercada por el ciclo C_1 y F_2 por el ciclo C_2.

Por el lema 2 tanto C_1 como C_2 tienen menos de n vértices y v_i, v_j y v_q son vértices tanto de C_1 como C_2. (Ver fig. 4).

Ahora, procederemos a colorear el grafo G' con su número cromático.

Como v_i, v_j y v_q forman un triángulo en G', están coloreados diferente.

Los ciclos C_1 y C_2, pueden ser coloreados con 3 colores diferentes cada uno, y como ya tienen esos tres colores, (v_i, v_j y v_q pertenecen a ambos ciclos) los demás puntos de C_1 y C_2 usan alguno de esos mismos 3 diferentes colores.

Luego, removemos v_q, y obtenemos G. ya coloreado y con $\chi(C_n) \leqslant 3$.

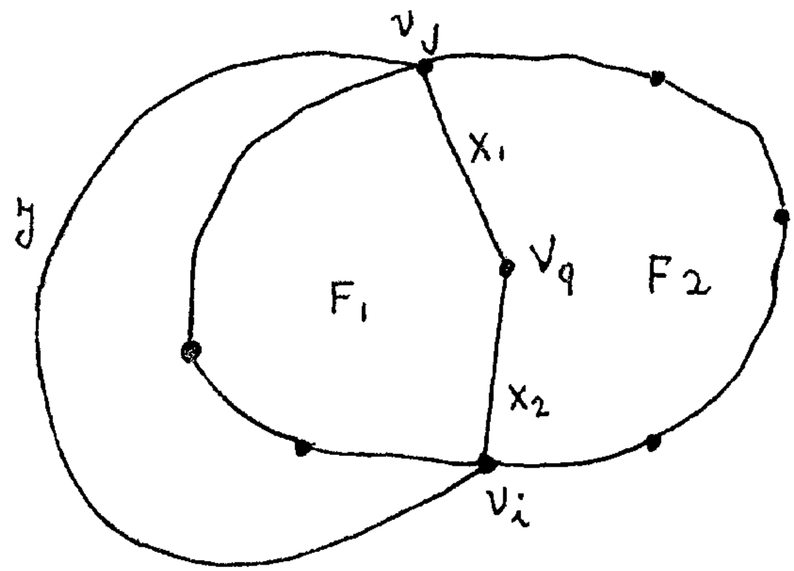

FIGURA 4

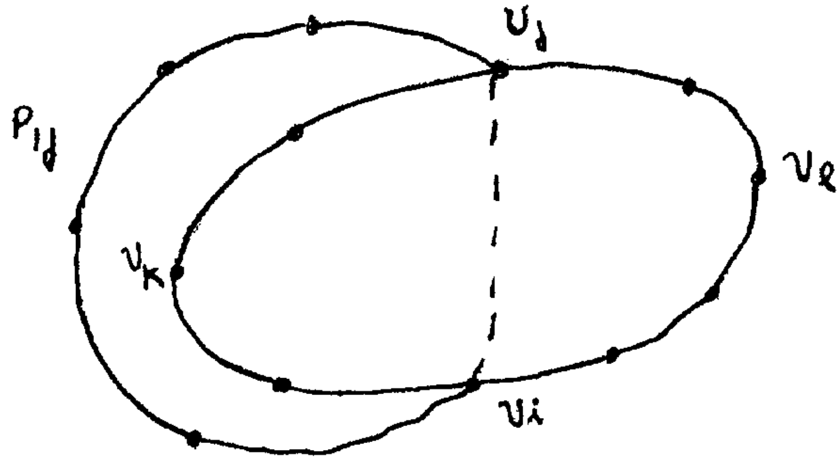

FIGURA 5

CASO 2.

v_i está conectado con v_j por P_{ij}.

Si nos imaginamos la diagonal $Z=(v_i,v_j)$ dividiendo la cara F, tachemos dos nuevas caras, una limitada por C_1 y la otra por C_2, ambas con menos de n vértices, luego ambas coloreables con a lo sumo 3 colores diferentes.

C_1 y C_2 tienen dos vértices comunes v_1 y v_j, los cuales por adyacentes están coloreados con colores distintos. Luego, el caso más interesante es cuando C_1 tiene uno o más vértices coloreados k y C_2 uno o más vértices coloreado 1, además de los que tengan coloreados i y j.

Como P_{ij} evita a cada vértice vk de estar conectado con un vértice v_l (de C_n). Esos vértices v_l pueden colorearse k y C_n tiene $\chi(C_n)=3$.

Ello prueba el teorema.

e) Nótese que el teorema sólo prueba que cada ciclo de G usa como máximo 3 colores diferentes, pero el teorema no considera la relación entre los diferentes colores de dos ciclos de G que no tengan vértices comunes, los cuales pudieran usar diferentes colores. (Por el Teorema de Hadwood sabemos que no pueden usar más de 5 colores diferentes).

COROLARIO

Ningún grafo planar tiene $\chi>4$.

PRUEBA

Para que el corolario sea falso, se requiere la existencia de un vértice v_5 en un grafo plano.

Probaremos que si v_5 existe en G, también necesariamente existe un ciclo C_n con $\chi(C_n) > 3$, contrario al teorema 1, en un grafo planar G'.

Llamando W_i, $i=1, 2, 3$, y 4 los vértices de un grafo planar G, adyacentes a v_5, consideraremos cualquier vértice W_1, $P_{1,2}$, W_2, $P_{2,3}$, W_3 $P_{3,4}$, W_4.

Dicho sendero necesariamente existe, porque:

a) Principiando desde cualquier W_1, buscamos un vértice W_2 conectado con nuestro escogido W_1. Si existe, vamos a b).
Si no existe tal vértice W_2, el color de nuestro vértice inicial se cambia a 2.

Si no hay vértice W_1 conectado con un vértice W_2, v_5 se puede colorear 1.

b) Desde nuestro encontrado W_2, buscamos un vértice W_3 conectado con nuestro W_2, si existe, pasamos a C), si no existe, el mencionado vértice W_2 es coloreado 3 y vamos a a).

c) Desde nuestro particular W_3 conectado con W_2, buscamos un vértice W_4, conectado con nuestra W_3, si no existe W_3 es coloreado 4 y vamos a b).

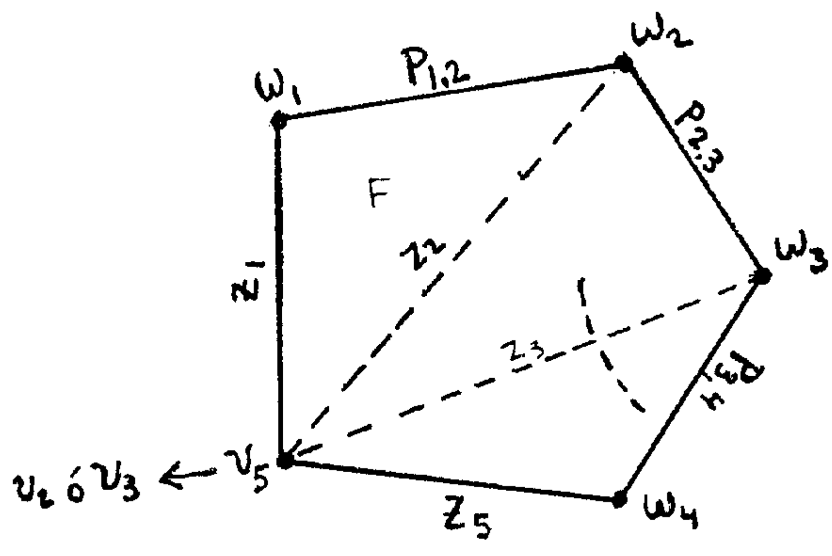

FIGURA 6

Si existe, tenemos el sendero W_1, $P_{1,2}$, W_2, $P_{2,3}$, W_3, $P_{3,4}$, W_4 (los $P_{i,j}$ no son necesarios) (ver fig. 6).

d) Con v_5, es formado un ciclo C_n, ver fig. 6, que es límite de la cara F.

e) Si nosotros removemos todas las líneas y vértices embebidos en F, obtenemos G'. Naturalmente que v_5 puede cambiar color por 2 ó 3, ya que las líneas $Z_2 = (v_5, W)$ y $Z_3 = (v_5 W_3)$ fueron removidas y además probamos en el Lema 1 que ningún ciclo puede tener $\chi(C_n) = 5$.

f) El ciclo C_n tiene $(C_n) = 4$ contrario al Teorema 1, luego es necesario para contradecir al Teorema 1 que los lados removidos sean necesarios para la coloración de los vértices y líneas embebidas en F.
Por inspección hay dos posibilidades:

1) Vértices 2 cambian a 4 (o viceversa)

2) Vértices 1 cambian a 3 (o viceversa)

ya que los senderos conectan directamente los vértices con los otros colores.

g) Como ambos casos son similares, probaremos únicamente que el caso 1 es imposible.

Primero, notemos que el color de cualquier vértice en F, removido para obtener G', puede ser cambiado, y además, si cualquier vértice v_2 (en C_n), aún W_2 fuera conectado con algún vértice de C_n coloreado 4, por vértices y líneas embebidas en F, esa conexión cruzaría la línea $Z_3 = (W_3, v_5)$, porque en nuestro C_n, en el sentido del reloj no hay ningún vértice v_4 antes de W_3 y ningún vértice v_2 después de W_3 y como G es plano, ese cruce es imposible.

Entonces, si W_4 puede cambiar a 2 en G', también puede cambiar en G. Entonces en G', C_n quedaría con $\chi(C_n) = 4$ y la existencia de v_5 contradice al teorema 1.

REFERENCIA:

1. F. Harary. "Graph Theory", Addison Wesley 1969.