UNA NOTA SOBRE INTEGRACION FRACCIONAL

Por **BHAGAT SINGH**

1. Llamo

$$(1.1) \quad g(y;\mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{o}^{y} f(x)\,(y-x)^{\mu-1}\,dx$$

la integral fraccional de Riemann-Liouville de orden μ, y

$$(1.2) \quad H_v\{f(x);y\} = \int_{o}^{\infty} f(x)\,H_v\,(xy)\,\sqrt{xy}\,dx$$

la trasformada H de orden v, de $f(x)$

El objeto de esta nota es obtener un teorema que relacione (1.1) y (1.2) y utilizarlo para deducir la integral fraccional.

2. Teorema 1. Sea la integral fraccional de Riemann-Liouville de orden μ de $f(x)$

(i) de orden μ de $f(x)$

(ii) $\Phi\,(\delta)$ por la transformada H de $y^{v+\frac{1}{2}}\,g(y^2;\,\mu)$ de orden v,

(iii) Siempre que la integral considerada exista
y que absolutamente integrable,

luego

$$(2.1) \quad \delta^{\mu-\frac{1}{2}}\,\Phi(\delta) = \frac{(-2)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \int_{o}^{y} x^{\frac{\mu+v}{2}}\,H_{\mu+v}\,(\delta\sqrt{x})\,f(x)\,dx,$$

$$R(v) > -3/2, \; R(\mu) > o.$$

Demostración. Tenemos de (i)

$$g(y;\mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^y f(x)\,(y-x)^{\mu-1}\,dx.$$

multiplicando en ambos lados por $y^{1/2} H_v(\delta\sqrt{y})$ e integrando entre los límites (o, ∞) resulta

(2.2)

$$\int_0^\infty y^{v/2} H_v(\delta\sqrt{y})\, g(y;\mu)dy = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty y^{1/2} H_v(\delta\sqrt{y})dy \int_0^\infty f(x)\,(y-x)^{\mu-1}dx.$$

Ahora cambiando el orden de integración a la derecha, lo que es justificable debido a la absoluta convergencia mencionada en las ecuaciones del teorema uno, tenemos

(2.3)

$$\int_0^\infty y^{v/2} H_v(\delta\sqrt{y})\, g(y;\mu)\, dy = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty f(x)dx \int_0 y^{v/2} H_v(\delta\sqrt{y})\,(y-x)^{\mu-1}dy.$$

Evaluando la integral interior al lado derecho, con auxilio del resultado conocido ([1], resultado 88, p. 199) y simplificando a ambos lados obtenemos el resultado deseado (2.1) luego (2.1 está demostrado

3. Ejemplo. Supongamos $f(x) = x^{-v/2} J_v(a\sqrt{x})$.

Por lo tanto $g(y;\mu) = \dfrac{2^{2-v} a^{-\mu} y^{\frac{\mu-v}{2}}}{\Gamma(\mu)\ \Gamma(v)} S_{\mu+v-1,\mu-v}(a\sqrt{y})$

y $\quad H_v[y^{v+1/2} g(y^2;\mu);\delta] = \dfrac{2^{2\mu+1} a^{-2\mu-3/2}}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(v)\,\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(1-v)}$

$$G^{2,3}_{3,3}\left(\frac{\delta^2}{a^2}\,\middle|\,\begin{matrix} 3/4+v/2,\ 1/4-v/2-\mu,\ 1/4+v/2-\mu \\ 3/4+v/2,\ 1/4-v/2-\mu,\ 1/4+v/2 \end{matrix}\right)$$

(véase [1] páginas 194 y 170)

Luego de (2.1) obtenemos

(3.1)

$$\int_{o}^{y} X^{\frac{\mu+v}{2}} H_{\mu+v}(\delta\sqrt{x})\, J_{v}(a\sqrt{x})\, dx = (-1)^{1\ \mu} \frac{2^{\mu+2}\, \delta^{\mu-\frac{1}{2}}\, a^{-2\mu-3/2}}{\Gamma(v)\, \Gamma(1-v)\, \Gamma(1-\mu)}$$

$$G_{3,3}^{2,3}\left(\frac{\delta^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} \frac{3}{4}+v/2,\ \frac{1}{4}-v/2-\mu,\ \frac{1}{4}+v/2-\mu \\ \frac{3}{4}+v/2,\ \frac{1}{4}-v/2-\mu,\ \frac{1}{4}+v/2 \end{matrix} \right) ,$$

$$o < R(v) < 1,\ R(2\mu+v) < 3/2.$$

REFERENCIAS

[1] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Tables of Integral Transforms. Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1954).

Bhagat Singh
Department of Mathematics
UWC-Manitowoc County
705 Viebahn Street
Manitowoc, Wisconsin 54220