SOBRE CIERTOS TEOREMAS EN EL CALCULO DE TRANSFORMADAS

Por M. L. MAHESHWARI,
Pilani (Rajasthan), India

1) *Introducción.* La ecuación integral

$$\emptyset(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re\, p > 0 \tag{1.1}$$

se conoce como transformada de Laplace de f(x), siempre que la integral a la derecha converja.

Sea

$$M^\gamma\ [f(x)] = \int_0^\infty (xy)^{\frac{1}{2}} K_\gamma(xy)\ f(x)\ dx = g(y) \tag{1.2}$$

la transformada-K de orden γ de f(x), siendo y una vaiable real.

Sea

$$g(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2}\ J_\gamma(xy)\ f(y)\ dy, \tag{1.3}$$

$$f(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2}\ J_\gamma(xy)\ f(y)\ dy, \tag{1.4}$$

luego las dos funciones relacionadas de ese modo se designan como transformadas de Hankel, una de otra.

Si $g(x) = f(x)$, las ecuaciones (1.3) y (1.4) dan

$$f(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2}\ J_\gamma(xy)\ f(y)\ dy,\ Re\ \gamma \geqslant -1/2$$

y en este caso f(x) se dice que es recíproca en sí misma en la transformada de Hankel de orden γ. Siguiendo a Tichmarsh podemos decir que f(x) petenece a R_γ, si es recíproca en sí misma en la transformada de Hankel de orden γ.

Sea $\gamma = \pm \frac{1}{2}$, (1.2) se reduce a (1.1) y (1.3) reduce a series de Fourier en senos y cosenos las respectivas transformadas.

En este trabajo, proponemos usar la transformada de Hankel en K para evaluar las integrales que corresponden a funciones de cilindros parabólicos y las funciones de Legendre. Se considera que los resultados son nuevos.

2) *Teorema 1.* Sea

(i) $M^{\gamma}\,[f(x)] = g(y)$ (2.1)

(ii) $\emptyset(y)$ es la función transfromada de Hankel de orden 2γ de $x^{-\frac{1}{2}}\, g(x^2)$. Luego

$$\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, f(x) \left[I_{\gamma}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx = \frac{4}{\pi a^{\frac{1}{2}}}\, \emptyset(a), \qquad (2.2)$$

siempre que $x^{\frac{1}{2}\pm\gamma}\, f(x) = 0(x^{\beta})$ $Re\ \beta > -1$ para pequeños x y siendo f(x), g(x) continuas y absolutamente integrales en $(0, \infty)$ y $Re\ \gamma > -\frac{1}{2}$.

Sea $y^{-\frac{1}{2}}\, g(y^2)$ la $R_{2\gamma}$. Luego

$$\int_0^{\infty} f(x) \left[I_{\gamma}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\pi a}\, g(a^2), \qquad (2.3)$$

siempre que existan las condiciones reunidas arriba.

Demostración. Multiplicando ambos lados de (2.1) por $y^{-\frac{1}{2}}\, J_{2\gamma}(ay^{\frac{1}{2}})$ e integrando con respecto y entre los límites $(0, \infty)$, obtenemos

$$\int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}}\, J_{2\gamma}(ay^{\frac{1}{2}})\, dy \int_0^{\infty} f(x)\, K_{\gamma}(xy)\, (xy^{\frac{1}{2}})\, dx =$$

$$= \int^{\infty} J_{2\gamma}(ay^{\frac{1}{2}})\, g(y)\, \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.4)$$

Cambiando el orden de integración, lo que se justifica por las condiciones dadas en el teorema, y evaluando la y-integral del lado izquierdo, obtenemos (2.2)

Sea $y^{-\frac{1}{2}}\, g(y^2)\ R_{2\gamma}$, luego

R.H.S. de $(2.4) = \frac{2}{a}\, g(a^2)$.

Por lo tanto obtenemos (2.3).

Teorema 2. Sea (i) $M^{\gamma}[f(x)] = g(y)$
(ii) $\emptyset(y)$ por la transformada de Hankel de orden $2\gamma - 1$ de $x^{1/2}\, g(x^2)$. Luego

$$\int_0^\infty x^{-3/2}\, f(x) \left[I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx = \frac{8}{\pi a^{3/2}}\, \emptyset(a), \quad (2.5)$$

siempre que $x^{1/2 \pm \gamma} f(x) = O(x^{\alpha})$, $Re\ \alpha > -1$ para x pequeñas y siendo f(x), g(x) continuas y absolutamente convergentes en $(0, \infty)$.

Sea $y^{1/2}\, g(y^2)$ la $R_{2\gamma-1}$. Luego

$$\int_0^\infty x^{-3/2}\, f(x) \left[I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx = \frac{8}{\pi a}\, \emptyset(a^2), \quad (2.6)$$

siempre que las condiciones mencionadas sean satisfechas, y $Re\ \gamma > 0$.

Teorema 3. Sea (i) $g(y)$ por la transformada de Hankel de orden γ of $f(x)$,

$$\text{(ii)}\ M^{\mu}[(x^{\gamma-\mu}\, f(x)] = \emptyset(y). \quad (2.7)$$

Luego

$$\int_0^\infty \frac{y^{(\gamma+1/2)}}{(y^2+b^2)^{(1+\gamma-\mu)}}\, g(y)\, dy = \frac{b^{(\mu-1/2)}}{2^{(\gamma-\mu)}\Gamma(\gamma-\mu+1)}\, \emptyset(b), \quad (2.8)$$

siempre que $x^{(\gamma-\mu+1/2\pm\mu)} f(x) = O(x^{\beta})$, $Re\ \beta > 1$, y $f(x)$, $g(x)$ sean continuas absolutamente integrables en $(0, \infty)$, $Re\ \gamma > -1$, $Re(\gamma - 2\mu + 3/2) > 0$.

Sea $f(x)$ la R_{γ}. Luego

$$\int_0^\infty \frac{y^{(\gamma+1/2)}}{(y^2+b^2)^{(1+\gamma-\mu)}}\, f(y)\, dy = \frac{b^{(\mu-1/2)}}{2^{(\gamma-\mu)}\Gamma(\gamma-\mu+1)}\, \emptyset(b),$$

siempre que la condición mencionada arriba exista.

La demostración de los teoremas dos y tres es similar a la del teorema 1.

Aplicaciones. Ejemplo 1. Sea $f(x) = 0$, $0 < x < b =$

$$= x^{\mu-2}\, (x^2 - b^2)^{-\mu/2}\, P^{\mu}_{\gamma-1/2}\left(\frac{x}{b}\right),\ b \leqq x \leqq z\ \infty.$$

Luego obtenemos de (2.2)

$$\int_0^\infty x^{(\mu-5/2)} \, (x^2 - b^2)^{-\mu/2} \, P^{\mu}_{\gamma-1/2}\left(\frac{x}{b}\right) \left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx =$$

$$= \frac{a^{2\gamma} \, 2^{1/2-2\gamma}}{\pi^{1/2} \, \Gamma(\gamma - \mu + 5/2) \, b^{(\gamma+3/2)}} \; {}_1F_1 \left[\begin{matrix} 1; & \\ \gamma - \mu + 5/2; & -\frac{a^2}{4b} \end{matrix} \right],$$

$Re\ \gamma > -1$ y $Re\ \mu < 1$.

Tomando $f(x)$ apropiada, obtenemos las siguientes integrales. Obtenemos de (2.2)

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-3/2} \, (x^2 - b^2)^{-\mu/2} \, P^{\mu}_{\gamma-3/2}\left(\frac{x}{b}\right) \left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\gamma) \, a^{2\gamma}}{\pi^{1/2} \, \Gamma(2\gamma + 1) \, \Gamma(3/2 - \mu + \gamma) \, 2^{(2\gamma-1/2)} \, b^{(\gamma+1/2)}}$$

$${}_2F_2 \left[\begin{matrix} 2\gamma, 1; & \\ 2\gamma + 1, 3/2 - \mu + \gamma; & -\frac{a^2}{4b^2} \end{matrix} \right].$$

Re $\mu < 1$, Re $\gamma > 0$.

$$= 2 \, \Gamma(2\gamma - 1) \, (2b^2 + a^2)^{1/2} \, P^{-2\gamma}_{-2} \left[\frac{2^{1/2} \, b}{(2b^2 + a^2)^{1/2}} \right] \quad Re\ \gamma > 1/2.$$

Obtenemos de (2.5)

$$\int_0^\infty x^{-3/2} D_{\gamma-1/2}(bx^{-1/2}) \, D_{-\gamma-1/2}(bx^{-1/2}) \left[I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx =$$

$$= \frac{4}{(2\gamma - 1) \, a^{2\gamma}} \left[(2b^2 + a^2)^{1/2} - 2^{1/2} \, b \right]^{2\gamma-1}, \quad Re\ \gamma > 1.$$

2. $$\int x^{-1/2} \, D_{\gamma-1/2}(bx^{-1/2}) \, D_{-\gamma-1/2}(bx^{-1/2}) \left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx =$$

Sea $f(x) = x^{1/2} \, J_\gamma[2(ax)^{1/2}] \, K_\gamma \, (2(ax)^{1/2})$.

Obtenemos de (2.7)

$$M^{\mu}\ [x^{\gamma-\mu+1/2}\ J_{\gamma}\{a(ax)^{1/2}\}\ K_{\gamma}\{2(ax)^{1/2}\}] =$$

$$= \frac{2^{(\gamma-\mu+2)}\ y^{(\mu-\gamma-3/2)}}{\pi^{1/2}}\ G^{31}_{13}\left(\frac{a^2}{y^2}\ \middle|\ \begin{matrix}\mu - 1/2\gamma \\ \gamma/2, 0, 1/2\end{matrix}\right)$$

$Re\ \gamma > -1,\ Re\ (\gamma - \mu) > -1,\ Re\ (\gamma - 2\mu) > -2$

Departamento de Matemáticas
Birla Institute of Technology and Science,
Pilani (Rajasthan), India.

REFERENCIAS

1. Erdelyi, A. y otros. Tables of Integral Transforms, Vol. II (1954), McGraw Hill, New York.

2. Titchmarsh, E. C. Introduction to the Theory of Fourier's Integrals. Oxford (1962).