SOBRE LAS ECUACIONES

(1) $x^3 + y^3 = z^3$, (2) $x^4 + y^4 = z^4$

Y SU IMPOSIBILIDAD EN NUMEROS ENTEROS

Por F. J. Duarte.

Nos proponemos demostrar estos teoremas por un procedimiento diferente del usado generalmente.

1 —Las fórmulas generales de resolución en números enteros de la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

son (*)

$$x = (a^2+3\,b^2) \quad (a+3\,b) \; c + c^4$$

$$y = (a^2+3\,b^2)^2 + c^3 \; (a - 3\,b)$$

$$z = - (a^2+3\,b^2) \quad (a - 3\,b) \; c - c^4$$

$$t = (a^2+3\,b^2)^2 + c^3 \; (a+3\,b).$$

Hagamos $z = o$ y se tendrá:

$$c^3 = - (a^2+3\,b^2) \quad (a - 3\,b).$$

El segundo miembro será un cubo si $b = a$ y resulta:

$$c = 2a.$$

(*) F. J. Duarte, *Sur les équations diophantiennes* $x^2+y^2+z^2=t^2$, $x^3+y^3+z^3=t^3$. *L'Enseignement Mathématique*, págs. 78-87, Paris-Genève, 1934.

Se obtiene para valores de las indeterminadas x, y, t:

$$x=48a^4,\quad y=o,\quad t=48a^4$$

Luego, para que la ecuación (1) sea posible en números enteros es necesario que

$$y=o.$$

2.—Consideremos ahora la ecuación (2), tomando el caso más general

$$(3) \quad a^4+b^4=c^2.$$

Pongamos $\qquad (4) \quad a^2+b^2=d, \quad ab=k,$

siendo d y k enteros racionales.

Se deduce: $\qquad (5) \quad c^2+2k^2=d^2.$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación

$$(6) \quad x^2+y^2+z^2=t^2$$

cuando $\qquad (7) \quad y=z.$

Ahora, la solución general de la ecuación (6) es dada por las fórmulas

$$(8) \left\{ \begin{aligned} x &= m^2-n^2-p^2+q^2 \\ y &= 2\,(mn-pq) \\ z &= 2\,(mp+nq) \\ t &= m^2+n^2+p^2+q^2 \end{aligned} \right.$$

Según la condición (7), se tendrá:

$$\frac{n+p}{m}=\frac{n-p}{q}=\frac{2n}{m+q}=\frac{2p}{m-q}.$$

Si designamos por ρ el valor de estas relaciones, se tendrá:

$$n = \frac{\rho}{2}(m+q), \quad p = \frac{\rho}{2}(m-q).$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (8) se obtendrá, después de multiplicar por

$$\frac{2}{m^2+q^2},$$

$$x = \rho^2 - 2, \qquad y = z = 2\rho, \qquad t = \rho^2 + 2.$$

Tomemos $$\rho = \frac{r}{s}$$

siendo r, s enteros racionales. Se tendrá después de multiplicar por s^2:

$$(9) \quad x = r^2 - 2s^2 = c, \qquad y = z = 2rs = k = ab, \qquad t = r^2 + 2s^2 = d.$$

$$(a = r, \qquad b = 2s).$$

Estas fórmulas dan la solución general en números enteros de la ecuación (5).

Ahora, de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene por la sustitución de los valores (9):

$$4s^2 \quad (r^2 + 3s^2) = o, \qquad 2s^2 = o,$$

de donde $$s = o$$

y, por consiguiente $$k = ab = o.$$

La ecuación (3) es, pues, imposible en enteros racionales a menos que uno de los números a, b, sea igual a cero.