TRABAJO PRESENTADO EN EL III Congreso Bolivariano DE MATEMATICA

SOBRE VARIEDADES CON BORDE

Por el Dr. JOSE REATEGUI CANGA

En estas páginas se demuestran algunos resultados sobre Variedades con borde en los espacios R^n:

Se consideran aplicaciones diferenciables $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ en la categoría de pares de variedades; se extiende el grado de Brouwer a tales aplicaciones, y con la definición de homotopía en 11ª categoría, la que durante la deformación permite al borde ∂M moverse en ∂N, se prueba que el grado de Brouwer es una invariante de homotopía (Teoremas 1 y 2). Se dan luego dos aplicaciones a casos concretos.

Anotaremos primeramente algunas definiciones:

Definición 1. Por diferenciable entendemos de clase C^∞. En general, si $X \subset R^k$ y $Y \subset R^l$ son arbitrarios subconjuntos, una aplicación o función $f : X \rightarrow Y$ es llamada *diferenciable* si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset R^k$ conteniendo x y una aplicación $F : U \rightarrow R^l$ de clase C^∞ que coincide con f *sobre* $U \cap X$.

Definición 2. Por difeomorfismo se entiende a toda aplicación $f : X \rightarrow f$ que lleva X homeomorficamento sobre f, siendo ambas f y su inversa f^{-1} funciones diferenciables.

La categoría de variedades diferenciables es denotada por $\mathfrak{F}$. Los morfismos son las aplicaciones diferenciables $\varphi : M \rightarrow N$ de una variedad en otra.

La categoría de pares de variedades es denotada por $\mathfrak{P}$. Los objetos son los pares (M, A) donde M es una variedad diferenciable y A es una sub-variedad cerrada de M. Los morfismos son las aplicaciones diferenciables $\varphi : (M, A) \rightarrow (N, B)$ que llevan M en N y A en B.

Obviamente, si $A \neq \phi$ la definición de φ require que $B \neq \phi$.

Si se identifica una variedad X con el par (X, ϕ), la categoría $\mathfrak{F}$ puede considerarse como una subcategoría de $\mathfrak{P}$.

Nos interesaremos en esta categoría principalmente en los casos en que A es el borde ∂M de M y $B = \partial N$.

Homotopía diferenciable. Dos aplicaciones:

$$f, g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$$

son *diferenciablemente homotópicas* y se escribe $f \sim g$, si existe un morfismo en:

$$F : (M, \partial M) \; x \; I \rightarrow (N, \partial N)$$

donde $I = [0, 1]$ el intervalo cerrado, tal que:

$$F(x, o) = f(\mathrm{x}) \; : F(x, 1) = g(x).$$

Desde que $(M, \partial M) \; x \; I = (M \; x \; I, \partial M \; x \; I)$ y F es un morfismo, se debe tener $F(x, t) \in \partial N$ para todo $x \in \partial M$ y $t \in I$, esto es, F lleva el *borde lateral* $\partial M \; x \; I$ de $M \; x \; I$ en ∂N.

Debe observar que aunque $M \; x \; I$ no es diferenciable en $\partial M \; x \; \partial I$ $\{\partial M \; x \; 0 \cup \partial M \; x \; 1\}$, la diferenciabilidad de F tiene sentido conforme a la definición 1.

Es inmediato que la homotopía es una relación de equivalencia.

Las clases de homotopía de las aplicaciones $(M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ se designan por $[M, \partial M; N, \partial N]$.

Ejemplo. $[I, \partial I; I, \partial I]$ consiste de 4 clases:

La primera es la clase de aplicaciones que llevan 0 en 0 y 1 en 1. La segunda lleva 0 en 1 y 1 en 0. La tercera lleva 0 y 1 en 1 y la cuarta lleva O y I en 0.

Cabe observar que en cat. $\mathfrak{F}$, $[I; I]$ consiste de una sola clase debido a que I es contractible.

Isotopía Diferenciable. Si f y g son difeomorfismos y si la homolopía F es tal que para todo $t \in I$:

$$F_t : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N) \text{ definido por } F_t(x) = F(x, t)$$

es un difeomorfismo, entonces se dice que f y g son diferenciablemente isotópicos.

Variedades Orientadas.

Para cada $m>0$, el espacio R^m se considerará con la orientación standard que corresponde a la base $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$.

En el caso del espacio vectorial cero dimensional, se conviene en definir una orientación con el símbolo $+1$ o el -1.

Definición 3. Una variedad orientada consiste de una variedad M de dimensión m, junto con una elección de orientación para cada espacio vectorial tangente TM_x. Si $m \geqslant 1$ todas las orientaciones deben ser *compatibles* como sigue:

El atlas A que define M debe tener la siguiente propiedad: Cada carta (U, φ) donde la coordenada φ aplica U sobre un abierto del $R^m = \{(x', \ldots, x^m) \in R^m / x^m \geqslant 0\}$, *preserva orientación* o invierte orientación en el sentido de que para cada $y \in U$ el isomorfismo:

$$d\varphi_y : TM_y \rightarrow R^m$$

lleva la orientación de TM_y en la orientación standard de R^m, o en la orientación opuesta.

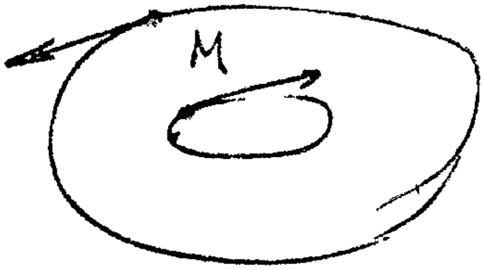
Si una variedad admite un atlas con la propiedad anterior se dice ser *orientable.*

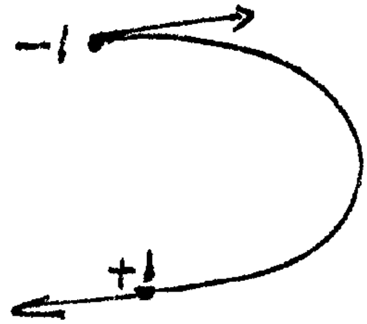
Si M es conexa y orientable, tiene exactamente dos orientaciones. Una se dice ser positiva y la otra, la opuesta, negativa.

Definición 4. Si M tiene borde y $m \geqslant 2$, cada orientación de M determina una para ∂M como sigue:

Para cada $x \in M$ se considera una base $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ positivamente orientada para TM_x de modo que $c_2, \ldots, c_m$ sean tangentes al borde y c_1 sea dirigida hacia el exterior de M. Entonces $(c_2, \ldots, c_m)$ determina la orientación requerida de TM_x. Esta orientación se dice ser *inducida* por la de M.

Si $m=1$, cada punto borde x es asignado la orientación -1 o $+1$ de acuerdo a si un vector positivamente orientado en x es dirigido hacia el interior o hacia el exterior.





Como variedades orientables se conoce todos los abiertos de los R^m; las esferas $S^{m-1}=\{X=(x^1, \ldots, x^m)\in R^m \,/\, ||x||=1\}$; los discos $R^m=\{x=(x^1, \ldots, x^m)\in R^m \,/\, ||x||\leqslant 1\}$, etc.

Valores Regulares. Consideremos un morfismo de:

$$f : (M, \partial M)\rightarrow(N, \partial N)$$

i) El conjunto C de puntos $x\in M$ tales que la aplicación lineal

$$df_x : TM_x \rightarrow TN_f(x)$$

tiene rango menor que $n=\dim. N$, es llamado el conjunto de los *puntos críticos* de f. El complemento $M-C$ es el conjunto de los *puntos regulares.*

ii) $f(C)$ se llama el conjunto de los *valores críticos* y el complemento $N-f(C)$ el conjunto de los *valores regulares.* ∘

Los valores regulares puede pertenecer al interior N o al borde de N. Como $f(\partial M)\subset\partial N$, todo valor regular y $\in\partial N$ es también valor regular para la restricción $fh_M : \partial M\rightarrow\partial N$.

Teorema de Brown. El conjunto de los valores regulares de un morfismo f *es denso en* N.

Esto es una consecuencia del teorema de Sard. (ver [3]).

Cuando M y N tienen la misma dimensión, en cada punto regular $x\in M$:

$df_x : TM_x\rightarrow TN_{f(x)}$ es un isomorfismo lineal.

Por el teorema de la función inversa (t.f.i.) el conjunto de puntos regulares $M-C$ es abierto, luego C es cerrado. En el caso M compacto, C lo es también, luego $f(C)$ es cerrado en N y por consiguiente el conjunto denso de los valores regulares $N-f(C)$ es también abierto.

Lema 1. Sea $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ un morfismo de $\mathfrak{p}$ entre variedad M y N de la misma dimensión. Si un valor regular y ∂N, entonces $f^{-1}(y) \subset \partial M$.

En efecto, si $x \epsilon f^{-1}(y)$ perteneciera a M, por el t.f.i., f aplicaría difeomórficamente una vecindad U de x (difeomorfa al R^m) sobre una vecindad V de $y \epsilon \partial N$ (difeomorfa al semi-espacio H^m de R^m), lo que es imposible. De aquí que se se debe tener $x \epsilon \partial M$.

Corolario. Para cada $x \epsilon f^{-1}(y)$, donde y es un valor regular perteneciente al borde ∂N, df_x lleva $T\partial M_x$ isomórficamente sobre $T\partial N_y$.

En efecto, como $f(\partial M) \subset \partial N$ se tiene $df_x(T\partial M_x) \subset T\partial N_y$.

Pero como y es también valor regular de la restricción $f/_{\partial M}$ $\partial M \to \partial N$ y dim $\partial M = dim\ \partial N$ resulta el isomorfismo:

$$df_x = d(f/_{\partial M})_x : T\partial M_x \to T\partial N_y$$

lo que prueba el corolario.

Lema 2. Sea $x \epsilon \partial M$, $y = f(x) \epsilon \partial N$ y supongamos que $df_x : TM \to TN_y$ es un isomorfismo. Entonces f aplica una vecindad $U \subset M$ de x difeomórficamente sobre $f(U)$ vecindad de y en N.

Prueba. Desde que df_x es un isomorfismo de los correspondientes espacios tangentes, sigue que dim $M = \dim N = n$.

Sean φ, ψ coordenadas definidas en vecindades de x e y respectivamente sobre abiertos de H^n. La función diferenciable

$$\psi^f \varphi^{-1} = g$$

aplica una vecindad V de $\varphi(x)$ en H^n llevando los puntos de borde $V \cap \partial H^n$ en ∂H^n.

Por la definición 1, existe una función diferenciable h de una vecindad W en R^n de $\varphi(x)$ en R^n tal que su restricción

$$h/_{V \cap W} = g/_{V \cap W}$$

Desde que: $dh_{\varphi(x)} = dg_{\varphi(x)} = d\psi_0 df_0 d_\varphi{}^{-1} : TR^n{}_{\varphi(x)} \to TR^n{}_{\psi(y)}$
es un isomorfismo, por el t.f.i., h aplica una vecindad $A \subset W$ de $\varphi(x)$ (en R^n) difeomórficamente sobre una vecindad $h(A)$ de $\psi(y)$ en R^n.

La vecindad $U = \varphi^{-1}(A \quad V)$ de x en M satisface al lema.
El grado de Brouwer.

En todo lo que sigue, f denota un morfismo en $\mathfrak{p}$:

$f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$

entre variedades diferenciables orientadas de la misma dimensión, $m=n$, siendo M *compacta* y N *conexa.*

Para cada punto regular $x \in M$ definimos el signo de df_x, sig df_x ser $+1$ o -1 de acuerdo a si df_x preserva o invierte la orientación.

Definición 5. Para cada valor regular $y \in N$, por el t.f.i., $f^{-1}(y)$ es un conjunto aislado, por consiguiente finito en M. Se define el grado de f en y como:

$$gr(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sig} df_x$$

Lema 3. El $gr\ (f, y)$ es localmente constante para cada valor regular y de N.

Prueba. Teniendo en cuenta la compatibilidad de orientaciones (definición 3), el lema quedará demostrado si se prueba que el número de puntos de $f^{-1}(y)$, denotado $\# f^{-1}(y)$, es localmente constante.

Si el valor regular $y \in \mathring{N}$, por el t.f.i., cada $x \in f^{-1}(y)$ posee una vecindad U_x en M que es llevada por f difeomórficamente sobre una vecindad V_x de y en N.

Igualmente, y $y \in \partial N$, por el lema 1, $f^{-1}(y) \subset \partial M$ y por el lema 2 cada $x \in f^{-1}(y)$ tiene una vecindad U_x en M difeomorfa por f a una vecindad V_x de y en N.

En ambos casos, la vecindad de y formada como:

$$V = \bigcap_{x\, f^{-1}(y)} V_x - f(M - \bigcup_{x\, f^{-1}(y)} U_x)$$

tiene la propiedad que para todo $z \in V$, $\# f^{-1}(z) = \# f^{-1}(y)$.

La variedad MxI puede ser orientada como un producto de modo que la orientación inducida sobre $Mx1$ sea la orientación para M, y sobre $Mx0$ la orientación opuesta a la de M.

Sea $F : (MxI, \partial MxI) \rightarrow (N, \partial N)$ un morfismo en $\mathfrak{p}$. Para cada valor regular y, conforme al lema 1 se tiene dos casos:

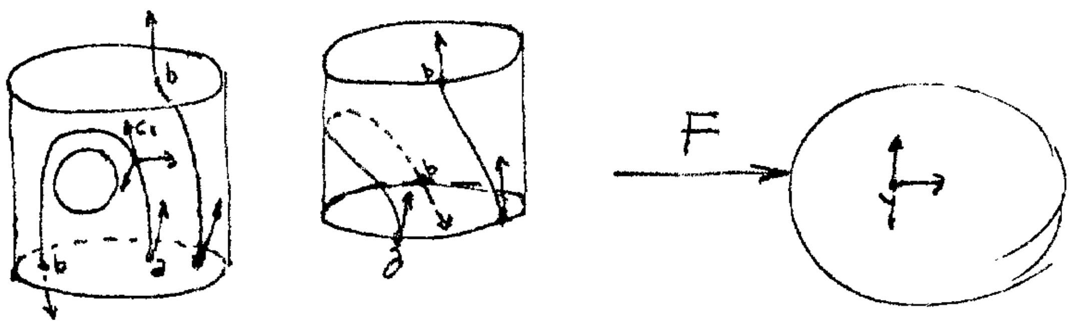
a) Si $y \in \mathring{N}$, $F^{-1}(y)$ como sub-variedad compacta de dimensión 1 es una unión finita de arcos y lasos de MxI con bordes de los arcos situados en $(\mathring{M}x0) \cup (\mathring{M}x1)$.

En ambos casos, sea $A \subset F^{-1}(y)$ uno de estos arcos con

$$\partial A = \{a\} \cup \{b\} \subset (Mx\text{J}) \cup (Mx1).$$

Las orientaciones de MxI y N determinan una orientación para A como sigue:

Dado $x \in A$, sea $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$ una base positivamente orientada para $T(MxI)_x$ con c_1 tangente a A. Entonces c_1 determina la orientación buscada si y sólo si dF_x lleva $(c_2, \ldots, c_{n+1})$ en una base positivamente orientada de TN_y.



El vector $c_1(x)$ positivamente orientado tangente a A en x, se dirigirá hacia afuera en un punto borde, supongamos b, y hacia adentro en el otro a.

Teorema 1. Sea $f \sim g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$.

Para cada valor regular común y:

$gr(f, y) = gr(g, y)$.

Prueba. Sea $F : (M, \partial M)xI \to (N, \partial N)$ la homotopía de f y g. Desde que la orientación inducida sobre $Mx1$ es la positiva de M, y la de $Mx0$ es la opuesta a M, se tiene: ... ...

$gr(F/_{(Mx0 \cup Mx1)}, y) = gr(g, y) - gr(f, y)$.

Probaremos que el primer miembro es 0:

1º Si y es valor regular para F, la orientación determinada en cada arco $A \subset F^{-1}(y)$, como se vio, tiene el vector C, dirigido hacia afuera en un borde, sea tal b, luego sig $d(F/_{Mx0 \cup Mx1})_b = +1$, y hacia adentro en el otro borde a, es decir sig $d(F/_{Mx0 \cup Mx1})_a = -1$.

Por consiguiente:

$$\text{sig } dF_a + \text{sig } dF_b = 0.$$

Sumando sobre todos los bordes de los arcos de $F^{-1}(y)$ se tiene:

$$gr(F/_{(Mx0 \cup Mx1)}, y) = 0.$$

2º Si y no es valor regular de F, por el teorema de Brown y el lema 3 existe un valor regular z para F (luego para f y g también) tal que:

$$gr(f, z) = gr(f, y), \; gr(g, z) = gr(g, y).$$

Razonando como en la 1ª parte se tiene:

$$gr(g, z) - gr(f, z) = gr(F/_{(Mx0 \cup Mx1)}, z) = 0.$$

De donde:

$$gr(f, y) = gr(f,z) = gr(g, z) = gr(g, y),$$

lo que completa el teorema.

Mencionaremos el conocido:

Lema de homogeneidad. Sean y, z arbitrarios puntos interiores de la variedad conexa N.

Existe un difeomorfismo $h : N \rightarrow N$ que es isotópico a la identidad que lleva y en z.

La prueba puede verse en [3].

Teorema 2. Si y, z son valores regulares cualesquiera para f, entonces

$$gr(f, y) = gr(f, z).$$

Este valor común que es llamado el grado de f, depende sólo de la clase de homotopía (diferenciable) de f.

Prueba. Distinguiremos dos casos:

a) Los valores regulares y, z son interiores a N.

Sea $h : N \rightarrow N$ un difeomorfismo que lleva y en z, isotópico a la identidad I_N conforme al lema de homogeneidad. Por la isotopía con la identidad, h preserva la orientación de N y da a la función compuesta h-f los mismos valores regulares de f. Luego:

$$gr(f, y) = gr(h\text{-}f, h(y)).$$

Siendo f homotópico a $h\,f$, por el teorema 1:

$$gr(h\text{-}f, z) = gr(f, z)$$

por consiguiente,

$$gr(f, y) = gr(f, z).$$

b) Un valor regular, o dos pertenecen a N.

Por el teorema de Brown y el lema 3 podemos hallar dos valores regulares vecinos y' de y, z' de z en el interior de N tales que:

$$gr(f, y) = gr(f, y')\,;\;\; gr(f, z') = gr(f, z).$$

Usando la parte a) para y', z' se tiene:

$$gr(f, y) = gr(f, y') = gr(f, z') = gr(f, z).$$

Denotemos este valor común por $gr\,f$. De acuerdo con el teorema 1 y el teorema de Brown, para toda aplicación diferenciablemente homotópica de f en la categoría se tiene:

$$gr\,g = gr\,f.$$

lo que completa la prueba del teorema 2.

Aplicación 1. Una función constante $c : (M, \partial M) \to (M, \partial M)$ tiene grado 0. No puede ser homotópica a la identidad 1_M que tiene grado 1.

Observación. Fuera de la categoría $\mathfrak{P}_0$ por ejemplo en $\mathfrak{F}_0$, la aplicación identidad de una variedad compacta con borde puede ser homotópica a una constante. Tal es el caso, entre otros, del disco $D^2 = \{z \in C / |z| < 1\}$.

La función:

$$\begin{gathered} F : D^2 \, x \, I \to D^2 \\ (z, t) \to t, z \end{gathered}$$

provee una homotopía diferenciable de la constante $F(z, 0) = 0$ con la identidad $F(z, 1) = z$ de D^2. Por supuesto que F no es una homotopía en cat. $\mathfrak{P}$.

Obviamente, los teoremas 1 y 2 no son válidos en la cat. $\mathfrak{F}$.

Aplicación 2. Aplicación antípode en D^n.

La aplicación de reflexión del eje i:

$$r_i : D^m \to D^m$$

$$(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m) \xrightarrow{r_i} (x^1, \ldots, -x^i, \ldots, x^m)$$

es un difeomorfismo del disco D^m que invierte orientación:

$$gr\, r_i = -1.$$

De aquí que la aplicación antípode λ^m:

$$\lambda^m\, (x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m) = (-x^1, \ldots, -x^i, \ldots, -x^m)$$

tiene:

$$gr\, \lambda^m = (-1)^m.$$

Si $m = 2p+1$, impar, la identidad de D^m no puede ser homotópica de la antípode, puesto que $gr\, \lambda^{ap+1} = -1$.

REFERENCIAS

1. Greenber: "Lectures on Algebraic Topology".
2. Lima: "Introdução a la Topología Diferential".
3. Milnor: "Topology from the Differentiable Viewpoint".
4. Singer & Thorpe: "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry".