# SOBRE CIERTOS TEOREMAS EN EL CALCULO DE TRANSFORMACIONES

Por M. L. MAHESHWARI,
Pilani (Rajasthan), India

## 1. INTRODUCCION

La ecuación integral

$$\varnothing(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \; Re\, p > 0, \tag{1.1}$$

se conoce como la transformada de Laplace de $f(x)$, siempre que la integral a la derecha sea convergente.



Sea

$$M^\gamma [f(x)] = \int_0^\infty (xy)^{1/2} K_\gamma(xy)\, f(x)\, dx = g(y) \tag{1.2}$$

sea la transformada $K$ de orden $\gamma$ de $f(x)$, donde $y$ es una variable real.

Sea

$$g(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\gamma(xy)\, f(y)\, dy, \tag{1.3}$$

$$f(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\gamma(xy)\, g(y)\, dy, \tag{1.4}$$

entonces las funciones así relacionadas se dice son las transformadas de Hankel una en otra.

Si $g(x)=f(x)$, las ecuaciones (1.3) y (1.4) dan

$$f(x)=\int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\gamma(xy)\, f(y)\, dy, \quad Re\,\gamma \geqslant -\tfrac{1}{2}$$

y en este caso $f(x)$ se designa como en la transformada de Hankel de orden $\gamma$. Siguiendo a Hardy y Tichmarsh podemos decir que $f(x)$ pertenece a $R_\gamma$, si es de orden $\gamma$.

Si $\gamma=\pm\tfrac{1}{2}$, (1.2) se reduce a (1.1) y (1.3) se reduce a las transformadas de Fourier en senos y cosenos respectivamente.

En este trabajo, proponemos usar la transformada de Hankel y la transformada $K$ para evaluar las integrales que contienen funciones de cilindros parabólicos y funciones de Legendre. Se cree que los resultados dados son nuevos.



## 2. TEOREMA 1

Sea

(i) $M^\gamma[f(x)]=g(y)$ (2.1)

(ii) $\varnothing(y)$ la tranformada de Hankel de orden $2\gamma$ de $x^{-1/2}g(x^2)$. Luego

$$\int_0^\infty x^{-1/2} f(x)\left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)-L\left(\frac{a^2}{4x}\right)\right]dx=\frac{4}{\pi a^{1/2}}\varnothing(a), \tag{2.2}$$

siempre que $x^{1/2\pm\gamma} f(x)=0(x^\beta)$ $Re\,\beta>-1$ para $x$ pequeñas y $f(x)$, $g(x)$ sean continuas y absolutamente integrables en $(0,\infty)$ y $Re\,\gamma>-\tfrac{1}{2}$.

Sea $y^{-1/2}g(y^2)$ *be* $R_{2\gamma}$. Luego

$$\int_0^\infty f(x)\left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)-L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)\right]\frac{dx}{x^{1/2}}=\frac{4}{\pi a}g(a^2), \tag{2.3}$$

siempre que existan las condiciones antes mencionadas.

*Demostración.* Multiplicando en ambos lados de (2.1) por $y^{-1/2} J_{2\gamma}(ay^{1/2})$ e integrando con respecto a $y$ en los límites $(0, \infty)$, obtenemos

$$\int_0^\infty y^{-1/2} J_{2\gamma}(ay^{1/2})\, dy \int_0^\infty f(x)\, K_\gamma(xy)\, (xy)^{1/2}\, dx = \int_0^\infty J_{2\gamma}(ay^{1/2})\, g(y)\, \frac{dy}{y^{1/2}} \tag{2.4}$$

Cambiando el orden de integración, lo cual se justifica por las condiciones dadas en el teorema, y evaluando la integral en $y$ del lado izquierdo, obtenemos (2.2).

Hagamos $y^{-1/2} g(y^2)$ sea $R_{2\gamma}$, luego $R.H.S.$ de $(2.4) = (2/a)\, g(a^2)$.

Entonces obtenemos (2.3).

TEOREMA 2



Hagamos

(i) $M^\gamma[f(x)] = g(y)$

(ii) $\varnothing(y)$ sea la transformada de Hankel de orden $2\gamma-1$ de $x^{1/2} g(x^2)$. Luego

$$\int_0^\infty x^{-3/2} f(x) \left[ I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx = \frac{8}{\pi a^{3/2}}\, \varnothing(a), \tag{2.5}$$

siempre que $x^{1/2\pm\gamma} f(x) = 0(x^\alpha)$, $Re\ \alpha > -1$ para pequeñas $x$, y $f(x)$, $g(x)$ sean continuas y absolutamente integrables en $(0, \infty)$.

Hagamos $y^{1/2} g(y^2)$ sea $R_{2\gamma-1}$. Luego

$$\int_0^\infty x^{-3/2} f(x) \left[ I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx = \frac{8}{\pi a}\, g(a^2), \tag{2.6}$$

siempre que se satisfagan las condiciones antes mencionadas y $Re\ \gamma > 0$.

TEOREMA 3

Sea

(i) $g(y)$ la transformada de Hankel de orden $\gamma$ de $f(x)$.

(ii) $M^{\mu}[(x^{\gamma-\mu} f(x)] = \varnothing(y)$. (2.7)

Luego

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{(\gamma+\frac{1}{2})}}{(y^2+b^2)^{(1+\gamma-\mu)}} g(y)\, dy = \frac{b^{(\mu-\frac{1}{2})}}{2^{(\gamma-\mu)}\,\Gamma(\gamma-\mu+1)} \varnothing(b), \tag{2.8}$$

siempre que $x^{(\gamma-\mu+\frac{1}{2}\pm\mu)} f(x) = 0(x^{\beta})$, $Re\,\beta > 1$, y $f(x)$, $g(x)$ sean continuas y absolutamente integrables en $(0, \infty)$, $Re\,\gamma > -1$, $Re(\gamma-2\mu+\frac{3}{2}) > 0$.



Hagamos $f(x)$ sea $R_{\gamma}$. Luego

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{(\gamma+\frac{1}{2})}}{(y^2+b^2)^{(1+\gamma-\mu)}} f(y)\, dy = \frac{b^{(\mu-\frac{1}{2})}}{2^{(\gamma-\mu)}\,\Gamma(1+\gamma-\mu)} \varnothing(b),$$

siempre que existan las condiciones antes mencionadas.

Las demostraciones de los teoremas dos y tres son semejantes a la del teorema 1.

## APLICACIONES:

*Ejemplo 1*

Sea $f(x) = 0$, $0 < x < b = x^{\mu-2}(x^2-b^2)^{-\mu/2} P^{\mu}_{\gamma-1/2}(x/b)$, $b < x < \infty$.

Luego obtenemos de (2.2)

$$\int_0^\infty x^{(\mu-\frac{5}{2})}\,(x^2-b^2)^{-\mu/2}\,P^{\mu}_{\gamma-\frac{1}{2}}(x/b)\left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)-L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)\right]dx$$

$$=\frac{a^{2\gamma}\,2^{1/2-2\gamma}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\gamma-\mu+\frac{5}{2})\,b^{(\gamma+\frac{3}{2})}}\;{}_1F_1\left[\begin{matrix}1;\\ \gamma-\mu+\frac{5}{2};\end{matrix}\;-\frac{a^2}{4b}\right],$$

$Re\,\gamma>-1$ y $Re\,\mu<1$.

Tomando valores convenientes de $f(x)$, obtenemos las integrales siguientes.

De (2.2) obtenemos

1. $$\int_b^\infty x^{\mu-\frac{3}{2}}\,(x^2-b^2)^{-\mu/2}\,P^{\mu}_{\gamma-\frac{3}{2}}(x/b)\left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)-L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\gamma)\,a^{2\gamma}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(2\gamma+1)\,\Gamma(\frac{3}{2}-\mu+\gamma)\,2^{(2\gamma-1/2)}\,b^{(\gamma+1/2)}}\;{}_2F_2\left[\begin{matrix}2\gamma,\,1;\\ 2\gamma+1,\,\frac{3}{2}-\mu+\gamma;\end{matrix}\;-\frac{a^2}{4b^2}\right],$$

$Re\,\mu<1$, $Re\,\gamma>0$.

2. $$\int_0^\infty x^{-1/2}\,D_{\gamma-1/2}(bx^{-1/2})\,D_{\gamma-1/2}(bx^{-1/2})\left[I_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)-L_\gamma\left(\frac{a^2}{4x}\right)\right]dx$$

$$=2\,\Gamma(2\gamma-1)\,(2b^2+a^2)^{1/2}\,P^{-2\gamma}_{-2}\left[\frac{2^{1/2}b}{(2b^2+a^2)^{1/2}}\right],\quad Re\,\gamma>\tfrac{1}{2}.$$

De 2.5 obtenemos

$$\int_0^\infty x^{-3/2} D_{\gamma-1/2}(bx^{-1/2})\, D_{-\gamma-1/2}(bx^{-1/2}) \left[ I_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) - L_{\gamma-1}\left(\frac{a^2}{4x}\right) \right] dx$$

$$= \frac{4}{(2\gamma-1)\, a^{2\gamma}} \left[ (2b^2+a^2)^{1/2} - 2^{1/2}\, b \right]^{2\gamma-1}, \; Re\,\gamma > 1.$$

Sea $f(x) = x^{1/2} J_\gamma[2(ax)^{1/2}]\, K_\gamma \left(2(ax)\right)^{1/2}$

De (2.7) obtenemos

$$M^\mu \left[ x^{\gamma-\mu+1/2} J_\gamma \{2(ax)^{1/2}\} K_\gamma \{2(ax)^{1/2}\} \right]$$

$$= \frac{2^{(\gamma-\mu+2)}\, y^{(\mu-\gamma-\frac{3}{2})}}{\pi^{1/2}}\, G^{31}_{13} \left( \frac{a^2}{y^2} \middle| \begin{matrix} \mu-\frac{1}{2}\gamma \\ \gamma/2,\ 0,\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right),$$

$$Re\,\gamma > -1,\; Re(\gamma-\mu) > -1,\; Re(\gamma-2\mu) > -2.$$

## REFERENCIAS


1. Erdelyi, A. y otros: "Tablas de Transformaciones Integrales". Vol. II, (1954), McGraw Hill, Nueva York.
2. Titchmarsch, E.C.: "Introducción a la Teoría de Integrales de Fourier". Oxford (1962).



Departamento de Matemáticas
Instituto Birla de Tecnología y Ciencia
Pilani (Rajasthan), India.