ESTUDIOS EXPERIMENTALES SOBRE LOS NUMEROS PRIMOS

Por F. J. DUARTE

Es sabido que la Aritmética, considerada como ciencia que estudia las propiedades de los números, es una de las partes más difíciles de las matemáticas. En efecto, no existen métodos generales para la resolución de problemas que, a primera vista, parecen sencillos.

Un problema fundamental, en la base misma de la ciencia, aún no resuelto, es el de la distribución o ley que siguen los números primos 2, 3, 5, 7,... en la sucesión de los enteros naturales.

Otro problema muy difícil es el de descomponer en factores primos un número entero de muchas cifras. Gauss dice en sus célebres *Disquisitiones Arithmeticae:*[1] "El problema que tiene por fin distinguir los números primos de los compuestos y de descomponer éstos en sus factores primos, es considerado como uno de los más importantes y más útiles de toda la Aritmética", y más adelante añade: "Además, la dignidad de la ciencia parece exigir que se busque con esmero todos los recursos necesarios para llegar a la solución de un problema tan elegante y tan célebre."

Es sabido que hace 22 siglos el filósofo Eratóstenes, de la Escuela de Alejandría, expuso la manera de hallar sucesivamente los primos en el conjunto de los números enteros impares por el método que se conoce con el nombre de *Criba de Eratóstenes.* Ese método no da ningún indicio de la ley que puedan seguir los números primos.

Existen fórmulas algébricas de una variable que, para valores particulares de ésta, entre ciertos límites dan números primos. Tales son, por ejemplo, las siguientes, entre las cuales hay varias que son conocidas:[2]

---

1. Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae,* Lipsia 1801, p. 576, nº 329. *Recherches Arithmetiques,* traducción francesa por A. C. M. Poullet Delisle, París, 1807, p. 416.
2. Kraïtchik, M.: *Théorie des Nombres,* París, 1922, p. 3. Lucas, E.: *Théorie des Nombres,* t. I, París, 1891, p. 355.

$$x^2+x+17, \quad x^2+x+41, \quad 6x^2+6x+31,$$
$$x^2+x+11, \quad 3x^2+3x+23, \quad 2x^2+29,$$
$$2x^2+11, \quad 4x^2+163, \quad 2x^2+41x+31,$$
$$6x^2+6x+11, \quad 6x^2+6x+17, \quad 3x^2+3x+11,$$

que dan, respectivamente, 16, 40, 29, 10, 22, 29, 11, 20, 28, 11, 16, 10 números primos cuando se dan a x los valores sucesivos 0, 1, 2, 3,. . .

Pero no existe, ni puede existir, una fórmula de esta clase que suministre exclusivamente números primos para todos los valores posibles de la variable.

Tampoco es posible determinar de un modo general cuál es el número primo que sigue a otro primo dado, cuando éste es un número de muchas cifras.

Sólo se conocen fórmulas asintóticas que permiten obtener, con bastante aproximación, el números de los números primos comprendidos entre dos enteros dados cuya diferencia sea suficientemente grande. Legendre dio a este respecto la fórmula:

$$y = \frac{x}{Log\ x - 1{,}08366} \cdot$$

la cual fue estudiada por Torelli.[3] También Gauss, Lejeune Dirichlet y otros se han ocupado de este problema.[4] Son conocidos, a este respecto, los trabajos muy notables de los matemáticos Ch. J. De la Vallée Poussin y J. Hadamard, quienes llegaron, independientemente uno de otro, a este teorema: "La suma de los logaritmos naturales de los números primos inferiores a y es asintótica a y."[5,6]

Se sabe que los números primos del conjunto de los números naturales enteros, se dividen en dos clases: los que son congruentes a 1 según el módulo 4 y los que lo son a -1, exceptuando el primero de los primos, 2, que no pertenece a ninguna de esas clases. Los de la primera clase y sus cuadrados equivalen de una sola manera a la

3. Torelli, G.: *Sulla Totalita dei Numeri Primi fino ad un Limite asegnato,* Napoli, 1901, caps. III y IV.
4. Landau, E.: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Leipzig, 1909, t. I, pp. 3-55.
5. *Extrait des Annales de la Société Scientifique de Bruxelles:* t. XX-XXI, Bruxelles, 1894-1897.
6. *Bulletin de la Société Mathematique de France:* t. 24, 1896 (reproducido en *Selecta,* Jubilé Scientifique de M. Jacques Hadamard, París, 1934, pp. 111-132).

suma de dos cuadrados de números enteros. El producto de varios números de la primera clase es suma de dos cuadrados de varias maneras según el número de factores. El doble de un número primo de esta clase es también suma de dos cuadrados de una sola manera, lo cual es evidente por ser 2 suma de dos cuadrados iguales a 1.

Ningún número de la forma $4h-1$ puede ser igual a una suma de dos cuadrados. En efecto, si se pudiera tener:

$$4h-1=(2r)^2+(2s-1)^2$$

se deduciría $$-1\equiv 1 \pmod{4}.$$

Dada la ignorancia en que estamos acerca de la distribución o la ley que puedan seguir los números primos, existe cierto interés en toda relación entre esos números, aun cuando ella no dependa de ninguna teoría y haya sido hallada por azar. Tal es, por ejemplo, la relación

$$2.3.5.7.11=11^2+13^2+17^2+19^2+23^2+29^2$$

entre los diez primeros números primos que notamos hace 36 años y que fue publicada, a instancia del matemático Dimitry Mirimanoff, profesor de la Universidad de Ginebra, en la revista belga *Sphinx*, dirigida por el especialista en Teoría de números M. Kraïtchik.[7] Desde luego, la presentamos aquí como simple curiosidad numérica. También notamos la siguiente relación entre los veinte primeros números primos:

$$2.3.5.7.11.13=3.7.11+13^2+17^2+19^2+23^2+29^2+31^2+37^2$$
$$+41^2+43^2+47^2+53^2+59^2+61^2+67^2+71^2.$$

Si representamos por (p) una factorial primaria, o sea el producto $2.3.5.7....p$, hallaremos que la factorial (17) está comprendida entre dos sumas de cuadrados de primos consecutivos de 2 a 193 y de 2 a 197. Para la factorial (19) los límites son: 2 a 569 y 2 a 571; para (23) los límites son 2 a 1667 y 2 a 1669. Finalmente, para (29) los límites son 2 a 5443 y 2 a 5449. Los valores de estas factoriales son:

$(17)=510510$
$(19)=9699690$
$(23)=223092870$
$(29)=6469693230.$

7. *Sphinx*: Revue Mensuelle des questions scientifiques - Directeur M. Kraïtchik, Bruxelles, 1934, p. 176.

Vamos ahora a exponer un método para eliminar, en el conjunto de los enteros impares, sucesivamente los factores primos 2, 3, 5, 7,... Para ella dividiremos la clase de los números impares en cuatro secciones según la última cifra 1, 3, 7 ó 9. Se hallarán todos los números no divisibles por 2, 3, 5 añadiendo indefinidamente a 11 y 17, primero 20 y luego 10; y, a 13 y 19 primero 10 y luego 20 al resultado. Se tendrá:

$$
\begin{aligned}
11+(20+10)+\ldots &= 11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71,\ldots\\
13+(10+20)+\ldots &= 13,\ 23,\ 43,\ 53,\ 73,\ldots\\
17+(20+10)+\ldots &= 17,\ 37,\ 47,\ 67,\ 77,\ldots\\
19+(10+20)+\ldots &= 19,\ 29,\ 49,\ 59,\ 79,\ldots
\end{aligned}
$$

Los números entre paréntesis tienen por suma:

$$20+10=30=2.3.5.$$

Del mismo modo, para obtener todos los números no divisibles por 2 ni por 3, 5, 7, agregaremos a los mismos números 11, 13, 17, 19 sucesivamente las decenas 10, 20,30 en el orden que indicamos. Para abreviar la escritura suprimimos los ceros y el signo de adición, así:

$$
\begin{aligned}
11+(21\ 21\ 32\ 12\ 31\ 21)+\ldots &= 11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71,\ 101,\ 121,\\
&\quad 131,\ 151,\ 181,\ 191,\ 211,\ 221,\ldots\\
13+(12\ 12\ 12\ 13\ 21\ 23)+\ldots &= 13,\ 23,\ 43,\ 53,\ 73,\ 83,\ 103,\\
&\quad 113,\ 143,\ 163,\ 173,\ 193,\ 223,\ldots\\
17+(21\ 23\ 12\ 12\ 12\ 13)+\ldots &= 17,\ 37,\ 47,\ 67,\ 97,\ 107,\ 127,\\
&\quad 157,\ 167,\ 187,\ 197,\ 227,\ldots\\
19+(13\ 21\ 23\ 12\ 12\ 12)+\ldots &= 19,\ 29,\ 59,\ 79,\ 89,\ 109,\ 139,\\
&\quad 149,\ 169,\ 179,\ 199,\ 209,\ldots
\end{aligned}
$$

Los números entre paréntesis suman:

$$10.5+20.5+30.2=210=2.3.5.7.$$

Para los números no divisibles por 2, 3, 5, 7, 11, tendremos:

$$
\begin{aligned}
31+(&121\ 332\ 312\ 121\ 213\ 233\ 121\ 321\ 321\ 231\\
&212\ 313\ 215\ 121\ 212\ 132\ 123\ 121\ 213\ 321\\
&231\ 212\ 124\ 213\ 421\ 212\ 132\ 123\ 312\ 121\\
&321\ 231\ 212\ 121\ 512\ 313\ 212\ 132\ 123\ 123)+\ldots\\
&=31,\ 41,\ 61,\ 71,\ 101,\ 131,\ 151,\ 181,\ 191,\ 211,\ldots
\end{aligned}
$$

$$13+(121\ 212\ 151\ 231\ 321\ 213\ 212\ 312\ 312\ 133$$
$$231\ 212\ 121\ 323\ 312\ 132\ 132\ 123\ 121\ 231$$
$$321\ 512\ 121\ 213\ 212\ 312\ 121\ 332\ 123\ 121$$
$$212\ 421\ 242\ 121\ 332\ 123\ 312\ 121\ 321\ 23)+\dots$$
$$=13, 23, 43, 53, 73, 83, 103, 113, 163, 173, 193, 223, 233, 263,\dots$$

$$17+(212\ 312\ 121\ 332\ 123\ 121\ 212\ 421\ 242\ 121$$
$$213\ 212\ 331\ 212\ 132\ 123\ 121\ 212\ 151\ 231$$
$$321\ 213\ 212\ 312\ 312\ 133\ 231\ 212\ 121\ 323$$
$$312\ 132\ 132\ 123\ 121\ 231\ 312\ 512\ 121\ 213)+\dots$$
$$=17, 37, 47, 67, 97, 107, 127, 137, 157, 167, 197, 227,\dots$$

$$19+(132\ 123\ 121\ 231\ 321\ 512\ 121\ 213\ 212\ 312$$
$$121\ 332\ 123\ 121\ 212\ 421\ 242\ 121\ 213\ 212$$
$$331\ 212\ 132\ 123\ 121\ 212\ 151\ 231\ 321\ 213$$
$$212\ 312\ 312\ 133\ 231\ 212\ 121\ 353\ 121\ 32)+\dots$$
$$=19, 29, 59, 79, 89, 109, 139, 149,\dots$$

Las decenas 10, 20, 30, 40, 50 figuran en los cuatro cuadros precedentes así:

$$\left.\begin{array}{l} 10.45+20.45+30.26+40.2+50.2 \\ 10.44+20.44+30.27+40.2+50.2 \\ 10.45+20.45+30.26+40.2+50.2 \\ 10.45+20.44+30.25+40.2+50.3 \end{array}\right\} = 2310 = 2.3.5.7.11.$$

Se obtiene así, en cada caso, una sucesión de números primos cuya última cifra es 1, 3, 7, 9, respectivamente.

Se ve, pues, qué orden o ley siguen los números enteros no divisibles por los factores primos 2, 3, 5; 2, 3, 5, 7; 2, 3, 5, 7, 11. Continuando de la misma manera se tendría la ley que siguen los enteros no divisibles por $2, 3, 5, 7, 11,\dots p$, siendo p un número primo tan grande como se quiera.

Creemos que el método que hemos expuesto permite ver con claridad la gran complicación de esa ley y la imposibilidad de expresarla de una manera simple. En todo caso, debemos conformarnos con los enunciados de leyes asintóticas como el teorema de De la Vallée Poussin y de Hadamard. También pretendemos haber mostrado la necesidad de dividir los números en las cuatro clases:

$$N_1 \equiv 1, \quad N_3 \equiv 3, \quad N_7 \equiv 7, \quad N_9 \equiv 9 \pmod{10}$$

Terminamos estas consideraciones sobre los números primos por una aplicación geométrica que nos parece interesante.

La ecuación (1) $x^2+y^2=z^2$

puede escribirse en la forma:

(2) $(x+y-z)^2+(z-x)^2+(z-y)^2=(2z-x-y)^2$

Ahora se tiene:

(3) $(x+y-z)+(z-x)+(z-y)=z$

Si x, y, z son enteros primos entre sí, será

(4) $z\equiv 1$ (mód. 4)

y podemos escribir dando valores sucesivos a z:

$2^2+1^2+2^2=3^2$	$2+1+2=5$
$4^2+1^2+8^2=9^2$	$4+1+8=13$
$6^2+9^2+2^2=11^2$	$6+9+2=17$
$12^2+9^2+8^2=17^2$	$12+9+8=29$
$10^2+25^2+2^2=27^2$	$10+25+2=37$
$8^2+1^2+32^2=33^2$	$8+1+32=41$
$20^2+25^2+8^2=33^2$	$20+25+8=53$
$10^2+1^2+50^2=51^2$	$10+1+50=61$
$30^2+25^2+18^2=43^2$	$30+25+18=73$
$30^2+9^2+50^2=59^2$	$30+9+50=89$
$40^2+25^2+32^2=57^2$	$40+25+32=97$

Se puede, pues, enunciar esta proposición:

En todo paralelepípedo rectángulo en números enteros, la suma de las tres aristas está expresada por un número primo de la forma $4h+1$ [ecuación (3)][8], o es producto de números primos de esta forma.

Como conclusión de este trabajo, creemos haber hecho ver, de manera muy clara, que no puede hallarse una ley general de la distribución de los números primos. Esa ley no podría ser sino una ley asintótica, que se obtendría escribiendo todos los números no divisibles por 2, 3, 5, 7,. . .p, cuando p tienda al infinito: lo cual es imposible de practicar. Desde luego, el método empleado permite formar una tabla de números primos.

---

8. Duarte, F. J.: *Sur les solutions irrationnelles et complexes de l'équation* $x^n+y^n=z^n$. Genève, 1933, p. 8.