UNA FORMULA DE DESARROLLO PARA LA FUNCION DE FOX GENERALIZADA CON DOS VARIABLES

Por los Dres. S. L. KALLA y P. C. MUNOT

1) INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es establecer una integral que comprenda la función de Fox generalizada de dos variables, definida por los autores,[6] y emplearla para obtener una fórmula desarrollada para la función generalizada que comprende la función de Bessel.

La función de Fox generalizada de dos variables dada recientemente por los autores, se representará como sigue:

$$H[x, y] = H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} m_1, \ 0 \\ p_1-m_1, \ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1}, A_{p_1}); \quad (b_{q_1}, B_{q_1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2, \ n_2 \\ p_2-m_2, \ q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p_2}, C_{p_2}), \quad (d_{q_2}, D_{q_2}) & x, \ y \\ \begin{pmatrix} m_3, \ n_3 \\ p_3-m_3, \ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3}, E_{p_3}); \quad (f_{q_3}, F_{q_3}) & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi_i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} F(s+t) \ \phi \ (s, t) \ x^s \, y^t \, ds \, dt$$

donde a la izquierda el símbolo (a_p, A_p) significa el conjunto de p de orden par $(a_1, A_1) \ldots, (a_p, A_p)$, a la derecha C_1 y C_2 son contornos convenientes

$$F(s+t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(a_j + A_j s + A_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1} \Gamma(1 - a_j - A_j s - A_j t) \quad \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(b_j + B_j s + B_j t)}$$

$$\phi\ (s+t)=\frac{\overset{m_2}{\underset{j=1}{\pi}}\ \Gamma(1-c_j+C_js)\ \overset{n_2}{\underset{j=1}{\pi}}\ \Gamma(d_j-D_js)\ \overset{m_3}{\underset{j=1}{\pi}}\ \Gamma(1-e_j+E_jt)\ \overset{n_3}{\underset{j=1}{\pi}}\ \Gamma(f-F_jt)}{\overset{p_2}{\underset{j=m_2+1}{\pi}}\ \Gamma(c_j-C_js)\ \overset{q_2}{\underset{j=n_2+1}{\pi}}\ \Gamma(1-d_j+D_js)\ \overset{p_3}{\underset{j=m_3+1}{\pi}}\ \Gamma(e_j-E_jt)\ \overset{q_3}{\underset{j=n_3+1}{\pi}}\ \Gamma(1-f_j+F_jt)}$$

con $p_1\geqslant m_1\geqslant 0$, $p_2m_2\geqslant 0$, $p_3\geqslant m_3\geqslant 0$, $q_1\geqslant 0$, $q_2\geqslant n_2\geqslant 0$, $q_3\geqslant n_3\geqslant 0$, $q_1+q_2\geqslant p_1+p_2$, $q_1+q_3\geqslant p_1+p_3$ y cada uno de los p' *s*, n' *s* y m' *s* es un entero no negativo.

El contorno en el plano s va de $\sigma-i\infty$ a $\sigma+i\infty$ curvado si es necesario de modo de asegurar que los polos $\Gamma(d_j-D_js)$, $j=1, \ldots, n_2$) quede a la derecha y los polos de $\Gamma(1-c_j+C_js)$, $j=1, \ldots, m_2$ y $\Gamma(a_j+A_js+A_jt)$; $j=1, \ldots, m_1$ a la izquierda del contorno. C_2 va en el plato t de $\rho-i\infty$ a $\rho+i\infty$ a lo largo del eje imaginario con las ramas necesarias para asegurar que los polos de $\Gamma(f_j-F_jt)$; $j=1, \ldots, n_3$, caigan a la derecha, y los polos de $\Gamma(1-e_jE_jt)$; $j=1, \ldots, m_3$ a la izquierda del contorno. Todas las *A′ s, B′ s, C′ s, D′ s, E′ s y F′ s* son reales.

2) LA INTEGRAL

La integral por demostrar es

$$\int_0^\infty x^{-u}\ J_w(x)J_v(x)\ H\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 0,\ 0 \\ p_1;\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1},\ A_{p_1});\quad (b_{q_1},\ B_{q_1}) & & \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p_2},\ C_{p_2});\quad (d_{q_2},\ D_{q_2}) & \alpha x^{2h},\ \beta & dx \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3},\ E_{p_3});\quad (f_{q_3},\ F_{q_3}) & & \end{array}\right]$$

$$=2^{-u} H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ p_1, & q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2+1 \\ p_2-m_2+3, & q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_{p_1}, A_{p_1}); \quad (b_{q_1}, B_{q_1}) \\ (\tfrac{1}{2}[1-w-v+u], h); \quad (c_{p_2}, C_{p_2}), \\ (\tfrac{1}{2}[u+w+v+1], h); \quad (\tfrac{1}{2}[u-w+v+1], h), \\ (\tfrac{1}{2}[u+w-v+1], h; \quad (u, 2h), \quad (d_{q_2}, D_{q_2}) \\ (e_{p_3}, E_{p_3}); \quad (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \middle| 2^{2h}\alpha, \beta \right] \tag{2}$$

donde h es un entero positivo y

$$p_1 \geqslant 0, \; p_2 \geqslant m_2 \geqslant 0, \; p_3 \geqslant m_3 \geqslant 0, \; q_1 \geqslant 0, \; q_2 \geqslant n_2 \geqslant 0,$$
$$q_3 \geqslant n_3 \geqslant 0, \; q_1+q_2 \geqslant p_1+p_2, \; q_1+q_3 \geqslant p_1+p_3$$

$$\lambda = -\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} C_j + \sum_{j=m_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{n_2} D_j - \sum_{j=n_2+1}^{q_2} D_j > 0$$

$$\mu = -\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} E_j - \sum_{j=m_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{n_3} F_j - \sum_{j=n_3+1}^{q_3} F_j > 0$$

$$|\arg \alpha| < \tfrac{1}{2} \lambda\pi, \; |\arg \beta| < \tfrac{1}{2} \mu\pi, \; R\left(1-u+w+v+\frac{2hd_j}{D_j}\right) > 0;$$

$$j=1, \ldots, n_2, \; R\left(\frac{2hc_j}{C_j} - u\right) < 2h; \; j=1, \ldots, m_2.$$

Demostración. — Expresando la función H general en el integrando como un tipo de integral Mellin-Barnes[1] y cambiando el orden de integraciones, lo que está justificado debido a la convergencia absoluta de las integrales consideradas, tenemos:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} F(s+t)\ \phi\ (s,t)\ \alpha^s \beta^t\, ds\, dt \int_0^\infty u^{-u+2hs} J_w(x) J_v(x)\, dx.$$

Ahora, evaluando la integral en x en virtud del resultado (3, p.342) obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{F(s+t)\,\phi\,(s,t)\,\Gamma(u-2hs)\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(w+v-u+2hs+1)\}\,2^{-u+2hs}\,\alpha^s\beta^t\, ds\, dt}{\Gamma\{\tfrac{1}{2}(u-2hs+w+v+1)\}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(u-2hs-w+v+1)\}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(u-2hs+w-v+1)\}}$$

Interpretándola con (1), la integral está establecida.

Caso particular

(i) Si tomamos todas las $A's$, $B's$, $C's$, $D's$, $E's$ y $F's$ iguales a la unidad, entonces la integral se reduce a un resultado conocido,[2] comprendiendo a la función hipergeométrica de Sharma con dos variables [7, p.27], dada recientemente por Bora y Kalla.

(ii) Además, si se hace $p_1 = q_1 = 0$, luego la integral de Bajpai [1, p.683] comprendiendo la función de Fox[4] resulta como caso particular del resultado.[2]

3) LA FORMULA DE DESARROLLO

La fórmula de desarrollo establecida aquí es

$$x^{u} J_w(x)\, H \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} 0,\ 0 \\ p_1,\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1}, A_{p_1});\quad (b_{q_1}, B_{q_1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p_2}, C_{p_2});\quad (d_{q_2}, D_{q_2}) & \alpha x^{2h}, \beta \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3}, E_{p_3});\quad (f_{q_3}, F_{q_3}) & \end{array} \right]$$

$$
= 2^u \sum_{k=0}^{\infty} r\, H \left[\begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 0,\ 0 \\ p_1,\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1},\ A_{p_1});\quad (b_{q_1},\ B_{q_1}) \\ \begin{pmatrix} m_2+1,\ n_2+1 \\ p_2-m_2+3,\ q_2-n_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2}[2-w-r+u],\ h);\quad (c_{p_2};\ C_{p_2}), \\ (\tfrac{1}{2}[2+u+w+r],\ h);\quad (\tfrac{1}{2}[u-w-r+2],\ h), \\ (\tfrac{1}{2}[u+w-r+2],\ h);\quad (u, 2h),\ (d_{q_2},\ D_{q_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3},\ E_{p_3});\quad (f_{q_3},\ F_{q_3}) \end{array} \middle| \, 2^{2h}\alpha, \beta \right] J_j\,(n) \ldots \quad (3)
$$

donde h es un número positivo y $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant m_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant m_3 \geqslant 0$, $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant n_2 \geqslant 0$, $q_3 \geqslant n_3 \geqslant 0$, $q_1+q_2 \geqslant$ $\geqslant p_1+p_2$, $q_1+q_3 \geqslant p_1+p_3$,

$$
\lambda = -\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} C_j - \sum_{j=m_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{n_2} D_j - \sum_{j=n_2+1}^{q_2} D_j > 0.
$$

$$
\mu = -\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} E_j - \sum_{j=m_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{n_3} F_j - \sum_{j=n_3+1}^{q_3} F_j > 0,
$$

$$
|\arg \alpha| < \tfrac{1}{2}\lambda\pi,\ |\arg \beta| < \tfrac{1}{2}\mu\pi,\ R\left(w+v-u+2h\frac{d_j}{D_j}\right) > 0;\ j=1, \ldots, n_2
$$

$$
R\left(2h\frac{c_j}{C_j}-u\right) < 2h+1 :\ j=1, \ldots, m_2 \cdot V \equiv r \equiv \mu+2k+1.
$$

Demostración

Sea

$$
f(x) = x^{-u} J_w(x)\ H\ [\alpha x^{2h}, \beta]
$$

$$
= \sum_{k=0}^{\infty} Ck\ J_{\mu+2k+1}(x)
$$

La ecuación (4) es válida, ya que $f(x)$ es continua y de limitada variación en el intervalo abierto $(0, \infty)$ cuando $u \geqslant 0$.

Multiplicando ambos lados de (4) por $x^{-1} J_{\mu+2m+1}(x)$, e integrando con respecto a x de 0 a ∞ se tiene

$$\int_0^\infty x^{-u-1} J_{\mu+2m+1}(x)\, J_w(x)\, H[\alpha x^{2h}, \beta]\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_0^\infty x^{-1} J_{\mu+2m+1}(x)\, J_{\mu+2k+1}(x)\, dx$$

Ahora, usando (2) y la propiedad de ortogonalidad de la función de Bessel [5. p.291] obtenemos

$$C_m = 2^{-u}\, v\, H \left[\begin{array}{c|l|c} \begin{bmatrix} 0,\ 0 \\ p_1,\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1},\ A_{q_1});\quad (b_{p_1},\ B_{q_1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2+1,\ n_2+1 \\ p_2-m_2+3,\ q_2-n_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2}[2-w-v+u], h);\quad (c_{p_2},\ C_{p_2}), \\ (\tfrac{1}{2}[(2+u+w+v], h);\quad (\tfrac{1}{2}[u-w+v+2], h) \\ (\tfrac{1}{2}[u+w-v+2], h);\quad (u, 2h),\ (d_{q_2},\ D_{q_2}) \end{array} & \begin{array}{c} 2h \\ 2\alpha,\ \beta \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3};\ E_{p_3});\quad (f_{q_3};\ F_{q_3}) & \end{array} \right]$$

donde $v \equiv \mu + 2m + 1$. La fórmula (3) sigue luego inmediatamente usando (4) y (6).

Es interesante notar que la fórmula de desarrollo de la función H de Fox, obtenida recientemente por Bajpai,[1] se deduce como un caso particular de (3), haciendo $p_1 = q_1 = 0$.

Los autores agradecen al Prof. R. S. Kushwaha por su gran interés y estímulo durante la preparación de este trabajo.

REFERENCIAS

1. Bajpai, S. D.: "An expansion formula for Fox's H-function", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 65 (1969), 683-685.

2. Bora, S. L. and Kalla, S. L.: "An expansion formula for the generalized function of two variables", Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A, 20 (to appear).

3. Erdélyi, A. et al.: *Tables of integral transforms,* vol. II, McGraw-Hill, New York (1954).

4. Fox, C.: "The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961), 395-429.

5. Luke, Y. L.: *Integrals of Bessel functions*, McGraw-Hill, New York (1962).

6. Munot, P. C. and Kalla, S. L.: *On an extension of generalized function of two variables* (in press).

7. Sharma, B. L.: "On the generalized function of two variables", *Annales de* la *Soc. de Bruxelles*, T. 79 (1965), 26-40.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Jodhpur
Jodhpur (Rajasthan)
India.