UN TEOREMA DE LA TRANSFORMACION LAPLACE CON DOS VARIANTES

Por R. S. DAHIYA, PILANI

1. En este trabajo he demostrado un teorema referente a la transformación de Laplace en dos variables. Se aplica luego para obtener ciertos corolarios y para evaluar algunos integrales de límite infinito con dos variables que indican la posible aplicación del teorema demostrado. Se cree que las integrales son nuevas y de gran interés.

2. Teorema 1: sea

$$\text{(i)} \quad F(p_1,p_2) \doteqdot G(s_1,s_2), \quad (1/p_r \doteqdot s_r, \; r = 1,2)$$

donde $L_w^2(G)$ es absolutamente convergente en un par de dominios asociados de convergencia S_{p_1} y S_{p_2} y para $r = 1,2$

$$\text{(ii)} \quad K_1(p_1,s_1) \doteqdot \exp\left\{-s_1\left(\phi_1^{\,1}(x_1) + \frac{1}{\phi_1^{\,k}(x_1)}\right)\right\} \gamma_1(x_1)$$

and

$$K_2(p_2,s_2) \doteqdot \exp\left\{-s_2\left(\phi_2^{\,m}(x_2) + \frac{1}{\phi_2^{\,n}(x_2)}\right)\right\} \gamma_2(x_2)$$

$$(1/p_r \doteqdot x_r, \quad r = 1,2),$$

en la cual $S_r (r = 1,2)$ es un parámetro real y la definición integral implicada en la relación operacional es absolutamente convergente en un par de dominios asociados de convergencia $D_{p_r} (r = 1,2)$

$$\text{(iii)} \quad \phi_1^{\,1}(p_1) + \frac{1}{\phi_1^{\,k}(p_1)} \in S_{p_1}$$

and

$$\emptyset_2^{m}(p_2) + \frac{1}{\emptyset_2^{n}(p_2)} \in S_{p_2} .$$

es limitada e integrable en s_r en $(0,00)$ o en $s(0 \leqq s_1 \leqq S_1, 0 \leqq s_2 \leqq S_2)$, $r = 1,2$.

(iv) $K_r(p_r, s_r)$ es limitable e integrable en s_r en $(0,00)$ o en $s(0 \leqq s_1 \leqq S_1, 0 \leqq s_2 \leqq S_2)$, $r = 1,2$.

(v) $G(s_1, s_2)$ es integrable L en s_1 y s_2 en $(0,00)$.

El dominio de convergencia ha sido completamente investigado por Doetsch & Voelker (1) en Die Zwei Dimensionale Laplace transform y por Ditkin & Prudnikov (2) en Operational calculus in two variables and its applications. Ha sido también investigada por mí (3) en mi tesis de doctorado. De modo que no he intentado aquí discutir la región de convergencia pero he indicado las condiciones bajo las cuales es válido este teorema en el enunciado del teorema.

Luego

$$g(p_1,p_2) \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty K_1(p_1,s_1)\ K_2(p_2,s_2)\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds_2$$

$$\doteqdot f(x_1,x_2) \equiv \frac{F\left[\emptyset_1^{1}(x_1) + \frac{1}{\emptyset_1^{k}(x_1)},\ \emptyset_2^{m}(x_2) + \frac{1}{\emptyset_2^{n}(x_2)}\right]}{\left(\emptyset_1^{1}(x_1) + \frac{1}{\emptyset_1^{k}(x_1)}\right)\left(\emptyset_2^{m}(x_2) + \frac{1}{\emptyset_2^{n}(x_2)}\right)} \gamma_1(x_1)\ \gamma_2(x_2)$$

siempre que $L_\pi^2(f)$ sea absolutamente convergente en el par de dominios asociados Ωp_1 y Ωp_2 que son las regiones comunes de Sp_1, Dp_1 y Sp_2, Dp_2 respectivamente.

3. Demostración. Tenemos

$$\frac{E(p_1,p_2)}{p_1\ p_2} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1p_1-s_2p_2}\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds_2\ . \qquad \dots (3\cdot 1)$$

Reemplazando p_1 y p_2 por $\emptyset_1^{1}(p_1) + \dfrac{1}{\emptyset_1^{k}(p_1)}$ y $\emptyset_2^{m}(p_2) + \dfrac{1}{\emptyset_2^{n}(p_2)}$

y multiplicando ambos lados de (3.1) por $\psi_1(p_1)$ $\psi_2(p_2)$, lo que está permitido debido a (iii), obtenemos

$$\frac{F\left[\phi_1^{l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(p_1)},\ \phi_2^{m}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(p_2)}\right]}{\left(\phi_1^{l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(p_1)}\right)\left(\phi_2^{m}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(p_2)}\right)}\,\psi_1(p_1)\,\psi_2(p_2)$$

$$=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \exp\left(-s_1\left\{\phi_1^{l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(p_1)}\right\}-s_2\left\{\phi_2^{m}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(p_2)}\right\}\right)$$
$$\times\ G(s_1,s_2)\,\psi_1(p_1)\,\psi_2(p_2)\,ds_1\,ds_2. \quad ..(3.2$$

multiplicando ambos lados de (3.2) por $p_1\,p_2\exp(-p_1x_1-p_2x_2)$ después reemplazando x_1 y x_2 por p_1 y p_2 y también integrando con respecto a x_1 y x_2 en (0,00), obtenemos luego.

$$p_1p_2\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-p_1x_1-p_2x_2}\,\frac{F\left[\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)},\ \phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right]}{\left(\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)}\right)\left(\phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right)}\,\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\,.\,dx_1dx_2$$

$$=p_1p_2\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-p_1x_1-p_2x_2}\,dx_1\,dx_2\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s_1\left(\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)}\right)-s_2\left(\phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right)}$$
$$\times\ G(s_1,s_2)\,\psi_1(s_1)\,\psi_2(s_2)\,ds_1\,ds_2. \quad \dots(3{\cdot}3)$$

Ahora debido a la hipótesis (3) las integrales en x son absolutamente convergentes y de modo similar debido a la hipótesis (iii) y (v) las integrales en s son también absolutamente convergentes. Por lo tanto está permitido un cambio en el orden de las integrales entre x y s. Por lo tanto

$$p_1p_2\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-p_1x_1-p_2x_2}\,\frac{F\left[\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)},\ \phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right]}{\left(\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)}\right)\left(\phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right)}$$

$$=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty G(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\left\{p_1\int_0^\infty e^{-p_1x_1-s_1\left(\phi_1^{l}(x_1)+\frac{1}{\phi_1^{k}(x_1)}\right)}\psi_1(x_1)\right\}dx_1$$
$$\times\left\{p_2\int_0^\infty e^{-p_2x_2-s_2\left(\phi_2^{m}(x_2)+\frac{1}{\phi_2^{n}(x_2)}\right)}\psi_2(x_1)\right\}dx_2\,. \quad (3.4)$$

Luego interpretando con ayuda de la condición (ii) se obtiene el teorema deseado.

4. Corolarios basados en el teorema anterior

(4.1) Let $\phi_r(x_r) = \sqrt{x_r}$, $l = 1$, $k = -1$, $m = -2$, $n = 2$ and $\psi(x_r) = (2x_r)^{v-1}$,

$$K_1(p_1,s_1) = \Gamma(2v)\ p_1^{1-v}\ e^{s_1^2/2p_1}\ D_{-2v}(s_1\sqrt{2/p_1})\ ,\ R(v)>0;$$

$$K_2(p_2,s_2) = 2^v\ (2s_2/p_2)^{v/2}\ p_2\ k_v(2\sqrt{2p_2s_2}),\ R(s_2)>0.$$

Luego por el teorema, se tiene

$$\Gamma(2v)\ p_1^{1-v}\ p_2^{1-v/2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{s_1^2/2p_1}\ s_2^{v/2}\ D_{-2v}(s_1\sqrt{2/p_1})\ k_v(2\sqrt{2s_2p_2})$$
$$\times\ G(s_1,s_2)\ ds_1ds_2 \doteqdot 2^{v/2-4}\ x_1^{v-3/2}\ x_2^{v}\ F(2\sqrt{x_1},2/x_2).$$

(4.2) Let $\phi_r(x_r) = 1/x_r$, $l = 1$, $k = -1$, $m = -2$, $n = 2$ and $\psi(x_r) = x_r^{v-1}$

Luego del teorema, se tiene

$$p_1^{1-v/2}\ p_2\ 2^{3-v/2}\ \Gamma(2v)\int_0^\infty\int_0^\infty (s_1/s_2)^{v/2}\ \exp(p_2^2/16s_2)\ k_v(2\sqrt{2s_1p_1})\ D_{-v}(p_2/2\sqrt{s_2})$$
$$\times\ G(s_1,s_2)\ ds_1ds_2 \doteqdot x_1^v\ x_2^{v-3}\ F(2/x_1,2x_2^2)\ .$$

(4.3) Let $\phi_r(x_r) = x_r$, $l = 2$, $k = -1$, $m = 2$, $n = -2$, $\psi(x_r) = x_r^{v-1}$.

y del teorema obtenemos

$$2^{1-3v/2}\left[\Gamma(v)\right]^2 p_1p_2\int_0^\infty\int_0^\infty (s_1s_2)^{-v/2}\ \exp\left[\frac{(p_1+s_1)^2}{8s_1}+\frac{p_2^2}{16s_2}\right] D_{-v}\left(\frac{p_1+s_1}{\sqrt{2s_1}}\right)$$
$$\times\ D_{-v}(p_2/2\sqrt{s_2})\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds_2 \doteqdot \frac{x_1^{v-2}\ x_2^{v-3}}{1+x_1}\ F(x_1+x_1^2\ ,\ 2x_2^2\ )\ .$$

(4.4) Let $\phi_r(x_r) = 1/x_r$, $l=m=1$, $k=n=-1$ and $\psi(x_r) = x_r^{v-1}$ $(r = 1,2)$

Luego de teorema obtenemos

$$2^{v+2}\ (p_1p_2)^{-v/2+1}\int_0^\infty\int_0^\infty (s_1s_2)^{v/2}\ K_v(2\sqrt{2s_1p_1})\ K_v(2\sqrt{2s_2p_2})\ G(s_1,s_2)\ ds_1ds_2$$
$$\doteqdot 1/4\ (x_1x_2)^v\ F(2/x_1\ ,\ 2/x_2).$$

5. Ejemplos basados en los Corolarios

(5.1) Consideremos

$$F(p_1,p_2) = p_1^{-m}\, p_2^{-n} \doteqdot \frac{x_1^{m}\, x_2^{n}}{(m)!\,(n)!} = G(x_1,x_2)$$

Luego por el Cor. (4.3), obtenemos

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty s_1^{m-v/2}\, s_2^{n-v/2} \exp\left[\frac{(p_1+s_1)^2}{8s_1} + \frac{p_2^2}{16s_2}\right] D_{-v}\left(\frac{p_1+s_1}{\sqrt{2s_1}}\right) D_{-v}\left(\frac{p_2}{\sqrt{2s_2}}\right) ds_1\, ds_2$$

$$= \frac{(m)!\,(n)!\, 2^{3v/2-n-1}\, \Gamma(v-2n-2)\, \Gamma(v-m-1)}{\left[\Gamma(v)\right]^2\, p_2^{v-2n-2}\, p_1^{(v-1)/2-m}} \exp(p_1/2)\, W_{1/2-v/2\,,\; v/2-m-1}(p_1),$$

(5.2) Consideremos

$$R(m,n) > -1,\ R(v-m) > 1,\ R(v-2n) > 2.$$

$$F(p_1,p_2) = \frac{p_2\, p_1^{1-m}}{(p_1 p_2+4a)} \doteqdot (x_1/4ax_2)^{m/2}\, J_m(4\sqrt{ax_1x_2}) = G(x_1,x_2)$$

Luego del Cor. (4.2), obtenemos

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (s_1/s_2)^{v/2+m/2} \exp(p_2^2/16s_2)\, K_v(2\sqrt{2s_1p_1})\, D_{-v}(p_2/2\sqrt{s_2})\, J_m(4\sqrt{as_1s_2})\, ds_1 ds_2$$

$$= \frac{2^{m+5v/2-6}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(v)\, a^{v/2}\, p_1^{m/2+1}\, p_2^{2v+m-2}}\, G^{23}_{32}\left(\frac{4p_1}{ap_2^2}\ \middle|\ \begin{matrix} 2-v-m/2,\ 3/2-m/2-v,\ 1-v/2-m/2 \\ 1+v/2+m/2,\ 1-v/2-m/2 \end{matrix}\right),$$

$$R(v+m) > 1/2,\ \ R(m) > -1.$$

(5.3) Consideremos

$$F(p_1,p_2) = \frac{\sqrt{p_2}}{p_1+\sqrt{p_2}} \doteqdot \mathrm{Erf}(x_1/2\sqrt{x_2}) = G(x_1,x_2)$$

Luego del Cor. (4.2), obtenemos

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (s_1/s_2)^{v/2} \exp(p_2^2/16s_2)\, K_v(2\sqrt{2s_1p_1})\, D_{-v}(p_2/2\sqrt{s_2})\, \mathrm{Erf}(s_1/2\sqrt{s_2})\, ds_1ds_2$$
$$= 2^{(3v-13)/4}\, \Gamma(v)\, p_1^{-3/2}\, p_2^{-v/2+3/2}\, G_{31}^{13}\left(1/\sqrt{2}\, p_1p_2 \,\middle|\, \begin{matrix} \pm(v+1)/2,\ 5/4-v/2 \\ (v+1)/2 \end{matrix}\right)$$

(5.4) Consideremos

$$R(v) > 1.$$
$$F(p_1,p_2) = \frac{\sqrt{p_1}\ p_2}{p_1p_2+a} \doteqdot (1/\sqrt{a\pi x_2})\, \sin(2\sqrt{ax_1x_2}) = G(x_1,x_2)$$

Luego del Cor. (4.2), se obtiene

$$\int_0^\infty\int_0^\infty s_1^{v/2}\, s_2^{-v/2-1/2} \exp(p_2^2/16s_2)\, K_v(2\sqrt{2s_1p_1})\, D_{-v}(p_2/2\sqrt{s_2})\, \sin(2\sqrt{as_1s_2})ds_1ds_2$$
$$= 2^{(7v-11)/2}\left[\Gamma(v)\right]^{-1} a^{\frac{1}{2}-v/2}\, p_1^{-5/4}\, p_2^{3/2-2v}\, G_{32}^{23}\left(\frac{16p_1}{ap_2^2} \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{7}{4}-v,\ \frac{5}{4}-v,\ 3/4-v/2 \\ v/2+5/4,\ 3/4-v/2 \end{matrix}\right),$$
$$R(v) > 0.$$

De modo similar, se han obtenido las siguientes integrales del Cor. (4.4), cuando $v = 0$.

(5.5) $$\int_0^\infty\int_0^\infty K_0(2\sqrt{2s_1p_1})\, K_0(2\sqrt{2s_2p_2}) \left[\mathrm{ber}(2\sqrt{s_1})\, \mathrm{bei}(2\sqrt{s_2})+\mathrm{ber}(2\sqrt{s_2})\mathrm{bei}(2\sqrt{s_1})\right]ds_1ds_2$$
$$= \frac{p_1+p_2}{2(4p_1^2+1)(4p_2^2+1)}, \qquad R(p_1,p_2) > 1/4.$$

(5.6) $$\int_0^\infty\int_0^\infty K_0(2\sqrt{2s_1p_1})\, K_0(2\sqrt{2s_2p_2}) \left[\mathrm{ber}(2\sqrt{s_1})\mathrm{ber}(2\sqrt{s_2})-\mathrm{bei}(2\sqrt{s_1})\mathrm{bei}(2\sqrt{s_2})\right]ds_1\, ds_2$$
$$= \frac{4p_1p_2-1}{4\ (4p_1^2+1)\ (4p_2^2+1)}, \qquad R(p_1,p_2) > 1/2.$$

(5.7) $$\int_0^\infty\int_0^\infty K_0(2\sqrt{s_1p_12})\, K_0(2\sqrt{2s_2p_2})\left\{\left[I_0(2\sqrt{s_1})+J_0(2\sqrt{s_1})\right]\left[I_0(2\sqrt{s_2})+J_0(2\sqrt{s_2})\right]\right.$$
$$\left. + \left[I_0(2\sqrt{s_1})-J_0(2\sqrt{s_1})\right]\left[I_0(2\sqrt{s_2})-J_0(2\sqrt{s_2})\right]\right\} ds_1ds_2 = \frac{4p_1p_2+1}{4\ (4p_1^2-1)(4p_2^2-1)}$$
$$R(p_1,p_2) > 1/2.$$

Para terminar doy las gracias al Dr. S. C. Mitra por las valiosas sugestiones y observaciones al trabajo.

REFERENCIAS

DOETSCH & VOELKER
1950 —Die Zwei Dimensionale Laplace transform.

DITKIN & PRUDNIKOV
1962 —Operational Calculus in two variables and its applications.

DAHIYA, R. S.
1965 —Thesis submitted for the degree of D. Phil. B.I.T.S., Pilani.

ERDELYI, A.
1954 —Tables of integral transforms, Vol. I & II, Bateman Proje.

MIKUSINSKI, J.
1959 —Operational Calculus.

From:

Dr. R. S. Dahiya
Departament of Mathematics
Birla Institute of Technology & Science
Pilani (Rajasthan)
India.
June 7, 1968.