ACERCA DE LAS PARADOJAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

Por Seguismundo Maur

1. *Introducción*

El presente trabajo me fue sugerido por la publicación "Consideraciones acerca de la paradoja de Bertrand Russell" del profesor Andrés Zavrotsky, aparecida en el Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Año XXVII, Tomo XXVII, Nº 74, págs. 21-25, año 1967, Caracas-Venezuela. Tiene por objeto aclarar la naturaleza del problema de las paradojas o antinomias de la teoría de conjuntos, la más característica de las cuales es la de Bertrand Russell, tratada en la mencionada publicación en forma poco rigurosa, desde el punto de vista matemático.

Ante todo, quisiera puntualizar ciertos aspectos confusos del trabajo del profesor Zavrotskl. 1) Lo que denomina "propiedad A y propiedad B" se expresa matemáticamente como las condiciones necesaria y suficiente o equivalencia lógica. 2) En cuanto a la supuesta definición de un conjunto como intersección de dos clases de conjuntos, la misma encierra una petición de principio, como resulta evidente, ya que la misma implica la existencia de clases de conjuntos para definir un conjunto cualquiera. Sabemos bien, que la idea de conjunto es un concepto primitivo, no definible, de la teoría de conjuntos. [3] Resulta confusa la solución propuesta a la paradoja, ya que mientras por un lado se desprende la no existencia del conjunto de Bertrand Russell, por otro lado se lo considera como la intersección de dos clases de conjuntos. Esta última siempre existe, aunque se trate del conjunto vacío. No debe confundirse la no existencia de un conjunto con el conjunto vacío, cuya realidad no se puede poner en duda a la luz de la teoría de conjuntos. Resumiendo, el teorema de la página 22 niega la existencia del conjunto en cuestión, mientras que la formulación matemática, en términos lógicos, de la página 23 establece que dicho conjunto es el vacío y por lo tanto existe. La contradicción resulta evidente.

Pasemos a continuación a nuestro propósito central, es decir, al verdadero significado de las antinomias en la teoría de conjuntos. En primer lugar, haremos una reseña histórica del problema, para luego ocuparnos concretamente de la formulación, en términos matemáticos, de la paradoja de Russell.

2. *Reseña histórica*

La teoría de conjuntos nace, en las últimas décadas del siglo diecinueve, como un esfuerzo de los matemáticos de proporcionar un sólido fundamento a los conceptos básicos del análisis. Sus precursores fueron Dedekind y Du Bois-Reymonde.

Entre los años 1871-1883, G. Cantor publica una serie de trabajos destinados a la investigación de las principales propiedades del concepto de conjunto, estableciendo las definiciones y teoremas fundamentales de la teoría de conjuntos. A partir de entonces, la teoría de conjuntos adquiere la forma de una teoría matemática independiente.

En un principio, son pocos los matemáticos que observan sin desconfianza esta nueva teoría; la mayoría muestra una actitud de suspicacia, en particular debido a ciertos conceptos y métodos no aceptables para la formación matemática de la mayoría de aquel tiempo. Sin embargo, y en la medida en que demuestra sus éxitos en las aplicaciones a otras ramas de la matemática, la teoría de conjuntos logra, poco a poco, el lugar como una disciplina matemática autónoma.

En los primeros años del presente siglo la teoría entra en crisis. Cantor introdujo el concepto de conjunto sin definirlo y sin establecerlo sobre una base axiomática. Aceptaba su existencia intuitivamente. Si bien esto resultó adecuado para el tratamiento de muchos problemas simples, en la primera fase de su desarrollo, resultó insuficiente frente a problemas de carácter más sutil, como se puso en evidencia posteriormente. Surgieron así las llamadas antinomias, es decir, contradicciones, no pudiendo ser resueitas con la noción de conjunto basada en la intuición. O sea, de la teoría, tal como la había estructurado Cantor, se podían inferir, frente a ciertas preguntas, dos proposiciones contradictorias p y no p.

La mencionada crisis puso de manifiesto la necesidad de estructurar la teoría de conjuntos sobre una base axiomática, labor realizada por Zermelo y sus continuadores. Lograron un sistema de axiomas que abarcaba todos los resultados conocidos de la teoría de conjuntos y libre de contradicciones. De tal manera, la aparición de las antinomias resultó a la postre provechosa al establecer bases más racionales y perfeccionando la teoría, de acuerdo a las necesidades de su desarrollo.

Ahora bien, la fundamentación axiomática de la teoría de conjuntos, si bien la libera de las contradicciones conocidas hasta el presente, no garantiza contra la aparición de nuevas antinomias. Sabemos, como resultado de los trabajos de K. Gödel (año 1939) que no puede existir ningún sistema de axiomas de la teoría de conjuntos que sea consistente, es decir, que sea imposible probar las proposiciones contradictorias p y no p por medio de los axiomas del sistema.

A pesar de algunas reservas, por parte de algunos matemáticos, en particular con referencia al axioma de Zermelo (o de elección) debido a algunos resultados paradójicos, los métodos y conceptos de la teoría de conjuntos han invadido todas las ramas de la matemática, a partir del primer cuarto del presente siglo. Su influencia se hace presente en definiciones como la de la integral de Lebesgue, en ciertos objetos del álgebra abstracta, geometría diferencial, etc. Se puede afirmar, que la teoría de conjuntos provocó una revolución desconocida desde los tiempos de la creación del cálculo infinitesimal por Leibniz y Newton.

Además, la teoría de conjuntos ha contribuido, en gran medida, al surgimiento de nuevas disciplinas matemáticas, tales como: topología, análisis funcional, teoría de las funciones reales, lógica matemática, teoría de las categorías y functores.

Una de las mayores conquistas de la teoría de conjuntos, gracias a las definiciones rigurosas de los conjuntos finito e infinito, es la introducción del concepto de número cardinal, base de una sólida fundamentación de la aritmética de los números naturales. Al mismo tiempo, al echar nueva luz sobre el concepto de conjunto infinito, lo ha liberado del carácter místico en el cual se encontraba envuelto.

3. *La antinomia de Russell*

Empezaremos recordando algunos resultados de la lógica, los cuales utilizaremos en los razonamientos que seguirán.

Llamamos función proposicional de una variable a toda expresión conteniendo una variable y teniendo la forma de una proposición. Estas expresiones, utilizaremos la notación $\Phi(x)$, tienen la propiedad de que si en lugar de la variable colocamos el objeto motivo de nuestros razonamientos (número, punto, conjunto, etc.), se transforman en proposiciones, verdaderas o falsas. Funciones proposicionales son, por ejemplo, propiedades o condiciones tales como

$x^2 > 0$, $x^2 + 1 < 0$, X es un conjunto vacío.

Si reemplazamos a x por un número real, en los dos primeros casos, o por un conjunto en el último, obtenemos proposiciones verdaderas o falsas. Por supuesto, el objeto que reemplaza a x debe ser tal que la expresión resultante tenga sentido, caso contrario no podríamos afirmar su verdad o falsedad, es decir, no se trataría de una proposición en sentido lógico. Los objetos pertenecientes al dominio y que transforman la función proposicional $\Phi(x)$ en una proposición verdadera, decimos que la verifican.

En el período inicial de la teoría de conjuntos, y basado en el concepto intuitivo de conjunto, se admitía, que para cada función proposicional $\Phi(x)$ existía el conjunto B compuesto de aquéllos y sólo de aquellos elementos que verifican la función propuesta. Es decir, enunciada una propiedad existía un conjunto conteniendo los objetos que gozaban de dicha propiedad y solamente a éstos.

Sin embargo, resulta que tal formulación conduce a una contradicción.

En efecto, consideremos la siguiente función proposicional: $\Phi(x)$ equivale a x no pertenece a x. En símbolos

$$\Phi(x) \rightleftarrows x \varepsilon x$$

Todo conjunto arbitrario pertenece al dominio de la función proposicional mencionada. Tal función conduce a la antinomia de Russell, resultado del siguiente

Teorema: No existe el conjunto de x que verifica la función proposicional $x \varepsilon x$. O sea, no existe el conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Demostración: Emplearemos el método de contraposición (reducción al absurdo). Supongamos que tal conjunto existe, sea Z dicho conjunto.

$$Z = \{ x/x \varepsilon x \}$$

Entonces queda establecida la equivalencia

$$(x \underline{\varepsilon} Z) \rightleftarrows (x \varepsilon x)$$

Ahora bien, como al dominio pertenecen todos los conjuntos, en particular pertenece a él el conjunto Z. Si reemplazamos a x por Z, resulta

$$(Z \underline{\varepsilon} Z) \rightleftarrows (Z \varepsilon Z)$$

Esta última equivalencia es de la forma p equivalente a no p, proposición falsa. Llegamos así a una contradicción resultante de admitir la existencia del conjunto Z. Por lo tanto, tal conjunto no existe, quedando probado el teorema.

La fundamentación axiomática, de la teoría de conjuntos, elimina la antinomia precedente al introducir el siguiente

Axioma (de los subconjuntos): Para toda función proposicional $\Phi(x)$ y para cada conjunto A existe tal conjunto B compuesto de aquellos y sólo aquellos elementos del conjunto A, los cuales verifican la función proposicional $\Phi(x)$. En símbolos lógicos

$$\underset{\Phi(x)}{\wedge} \ \underset{A}{\wedge} \ \underset{B}{\vee} \left\{x \varepsilon B \rightleftarrows [(x \varepsilon A) \wedge \Phi(x)]\right\}$$

o, su forma equivalente

$$(x \varepsilon B) \rightleftarrows (x \varepsilon A \wedge \Phi(x)$$

Si ahora nos remitimos al teorema planteado, al dominio de la función proposicional ya no pertenece todo conjunto arbitrario, sino solamente aquellos que son elementos de A. De esta manera queda resuelta la antinomia de Russell.

Para un tratamiento más completo y extenso de la teoría de conjuntos remitimos al lector las obras especializadas de la bibliografía adjunta.

BIBLIOGRAFIA

BERNAYS.—A system of axiomatic Set Theory. The Journal of Symbolic Logic 19. 1954.

FRAENKEL.—Foundations of Set Theory. Amsterdam. 1958.

GLEASON.—Fundamentals of Abstract Analysis. Addison, Wesley. 1966.

GÖDEL.—Consistency of the axiom of choice. Annals of Math. Studies 3. 1940.

KURATOWSKI - MOSTOWSKI.—Teoría Mnogósci. Monografie Matematyczne, 27. Warszawa, Wrocaw. 1952.

SIERPINSKI.—Algébre des Ensemble. Monografie Matematyczne 22. 1951.