UN TEOREMA DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE CON DOS VARIABLES

Por
R. S. DAHIYA
Pilani (Raj.), India

1. El objeto de la presente nota es establecer un teorema correspondiente a la transformación de Laplace con dos variables. Como aplicación del teorema he obtenido ciertos corolarios y también he calculado integrales de límite infinito.

2. Lea

(i) $p_1 p_2 F(p_1, p_2) \doteqdot G(s_1, s_2), \quad 1/p_r \doteqdot s_r \quad (r = 1,2),$ —

donde $L_{\Pi}^{2}\{G\}$ es absolutamente convergente en un dominio S_{p_1} definido

por $\alpha_i \leq R(p_i) \leq \beta_i$ donde $i = 1,2.$

(ii) $p_r \left[\psi_r(p_r) \right]^k e^{-s_r \left[\phi_r^{1}(p_r) + \frac{1}{\phi_r^{\Pi}(p_r)} \right]} \doteqdot \theta_r(s_r, x_r), \quad 1/p_r \doteqdot x_r,$

$r = 1,2$ en donde s ocurre como un parámetro real y $L_{\Pi}\{\theta_r\}$ es

absolutamente convergente en (—00, 00) con respecto a x_r en los dominios asociados de convergencia $D_{p_r} (r = 1,2)$ y $\phi_r^{1}(p_r) + \frac{1}{\phi_r^{\Pi}(p_r)} \in S_{p_r}$.

(iii) $\theta_r(s_r, x_r)$ (—00, 00)
o en $(-s_r \leq S_r \leq s_r)$. está limitada y es integrable absolutamente en
(iv) $G(s_1, s_2)$ es absolutamente integrable en s_r en (—00, 00)

Por consiguiente

$$p_1 p_2 \left[\psi_1(p_1)\ \psi(p_2)\right]^k \ F\left\{\phi_1^{\ 1}(p_1) + \frac{1}{\phi_1^{\ m}(p_1)}\ ,\ \phi_2^{\ 1}(p_2) + \frac{1}{\phi_2^{\ m}(p_2)}\right\}$$

$$\doteqdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(s_1, x_1)\ \theta_2(s_2, x_2)\ G(s_1, s_2)\ ds_1\ ds_2, \qquad \ldots (2.1)$$

Siempre que la integral definida sea absolutamente convergente en un par de dominios de convergencia asociados, digamos Ω_{p1} y Ω_{p2} siendo Ω_{p1} la región común de D_{p1} y S_{p1} y Ω_{p2} la región común de D_{p2} y S_{p2}.

La condición es (iii) y (i v) pueden dejarse y reemplazarse por la única condición de que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-R}^{\infty} e^{-p_1x_1-p_2x_2} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(s_1, x_1)\ \theta_2(s_2, x_2)\ G(s_1,s_2)\ ds_1 ds_2\right\} dx_1 dx_2,$$

es absolutamente convergente.

Demostración: Tenemos

$$F(p_1,p_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_1s_1-p_2s_2}\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds_2. \qquad \ldots (2.2)$$

y reemplazando p_r by $\phi_r^{\ 1}(p_r) + \dfrac{1}{\phi_r^{\ m}(p_r)}$ $(r = 1,2)$ in (2.2), obtenemos

$$F\left\{\phi_1^{\ 1}(p_1)+ \frac{1}{\phi_1^{\ m}(p_1)}\ ,\ \phi_2^{\ 1}(p_2)+ \frac{1}{\phi_2^{\ m}(p_2)}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_1\left(\phi_1^{\ 1}(p_1)+ \frac{1}{\phi_1^{\ m}(p_1)}\right) - s_2\left(\phi_2^{\ 1}(p_2)+ \frac{1}{\phi_2^{\ m}(p_2)}\right)} \times G(s_1,s_2) ds_1 ds_2. \qquad \ldots (2.3)$$

Multiplicando a ambos lados de (2.3) por $p_1 p_2 \left[\psi_1(p_1)\ \psi_2(p_2)\right]^k$ lo que está permitido, obtenemos

$$p_1p_2\left[\psi_1(p_1)\times\psi_2(p_2)\right]^k F\left[\phi_1^{\,l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{\,m}(p_1)}\,,\ \phi_2^{\,l}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{\,m}(p_2)}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_1\left[\psi_1(p_1)\right]^k e^{-s_1\left(\phi_1^{\,l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{\,m}(p_1)}\right)} \times p_2\left[\psi_2(p_2)\right]^k e^{-s_2\left(\phi_2^{\,l}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{\,m}(p_2)}\right)}$$

$$\times\, G(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\,.$$

$$= p_1p_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_1x_1-p_2x_2}\,\theta_1(s_1,x_1)\,\theta_2(s_2,x_2)\,dx_1\,dx_2, \quad (2.4)$$

válida en el par de
dominios de convergencia asociados $\div$ Ωp_1 y Ωp_2 como

se definió anteriormente. Como las integrales en x. y en s. son absolutamente convergentes en (i i), (i i i) y (i v), se puede permitir un cambio del orden de integración en (2,4). Por lo tanto a la derecha de 2,4).

$$= p_1p_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_1x_1-p_2x_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_1(s_1,x_1)\,\theta_2(s_2,x_2)\,G(s_1,s_2)\,ds_1ds_2\right\}dx_1dx_2$$

o, $$p_1p_2\left[\psi_1(p_1)\,\psi_2(p_2)\right]^k F\left\{\phi_1^{\,l}(p_1)+\frac{1}{\phi_1^{\,m}(p_1)}\,,\ \phi_2^{\,l}(p_2)+\frac{1}{\phi_2^{\,m}(p_2)}\right\}$$

$$\doteqdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_1(s_1,x_1)\,\theta_2(s_2,x_2)\,G(s_1,s_2)\,ds_1ds_2.$$

3. Corolarios basados en el teorema anterior.

(a) Sea $k=-\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$ and $\psi_r(p_r)=p_r=\phi_r(p_r)$

$$\therefore\ (p_r)^{\frac{1}{2}}\,e^{-2s_r\sqrt{p_r}} \doteqdot \frac{e^{-s_r^2/x_r}}{\sqrt{\pi x_r}}\,U(x_r),\quad s_r>0,\ r=1,2.$$

Luego del teorema, obtenemos

$$\sqrt{p_1p_2}\;F\left[2\sqrt{p_1}\,,\ 2\sqrt{p_2}\right] \doteqdot \frac{U(x_1)\,U(x_2)}{\pi\sqrt{x_1x_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_1^2/x_1-s_2^2/x_2}\,G(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

(b) Sea $k=l=1$, $m=-1$, and $\phi_r(p_r)=\sqrt{p_r^2+a^2}-p_r$

$$\psi_r(p_r)=\frac{1}{(p_r^2+a^2)^{1/2}\,\left(p_r+\sqrt{p_r^2+a^2}\right)^{v}}$$

$$\frac{p_r(p_r^2+a^2)^{-1/2}}{(p_r+\sqrt{p_r^2+a^2})^v} e^{-2s_r(\sqrt{p_r^2+a^2}-p_r)} \doteqdot a^{-v} x_r^{v/2} (x_r+4s_r)^{-v/2} X\ J_v(a\sqrt{x_r^2+4s_r x_r})$$
$$U(x_r) \equiv \theta_r(s_r,x_r)$$

Así del teorema obtenemos

$$\frac{p_1 p_2 (p_1^2+a^2)^{-1/2} (p_2^2+a^2)^{-1/2}}{(p_1+\sqrt{p_1^2+a^2})^v (p_2+\sqrt{p_2^2+a^2})^v} F\left[2(\sqrt{p_1^2+a^2}-p_1),\ 2(\sqrt{p_2^2+a^2}-p_2)\right]$$
$$\doteqdot a^{-2v} U(x_1)\ U(x_2) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1x_2)^{v/2} \left[(x_1+4s_1)(x_2+4s_2)\right]^{-v/2} J_v(a\sqrt{x_1^2+4s_1x_1})$$
$$X\ J_v(a\sqrt{x_2^2+4s_2x_2})\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds2,$$

c) Sea $k = 1 = 1$, $n = \infty$, $\phi_r(p_r) = 1/p_r^{\mu_r}$, $\psi_r(p_r) = 1/p_r^{\lambda r+1}$

$$\therefore p_r^{-\lambda r} e^{-s_r/p_r^{\mu_r}} \doteqdot x_r^{\lambda_r} J_{\lambda r}^{\mu_r}(s_r\, x_r^{\mu_r})\ U(x_r)\ ,\ r = 1,\ 2.$$

Luego del teorema obtenemos

$$p_1^{-\lambda_1} p_2^{-\lambda_2} F\left[p_1^{-\mu_1},\ p_2^{-\mu_2}\right] \doteqdot U(x_1)\ U(x_2)\ x_1^{\lambda_1}\ x_2^{\lambda_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J_{\lambda_1}^{\mu_1}(s_1x_1^{\mu_1})\ J_{\lambda_2}^{\mu_2}(s_2x_2^{\mu_2})$$
$$X\ G(s_1,s_2)\ ds_1\ ds_2 \qquad \ldots \text{(c.1)}$$

En especial, si tomamos $\mu_1 = \mu_2 = 1$, obtenemos

$$p_1^{-\lambda_1}\ p_2^{-\lambda_2}\ F(1/p_1,1/p_2) \doteqdot U(x_1)\ U(x_2)\ x_1^{\lambda_1/2}\ x_2^{\lambda_2/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1^{-\frac{\lambda_1}{2}}\ s_2^{-\frac{\lambda_2}{2}}\ J_{\lambda_1}(2\sqrt{s_1x_1})\ J_{\lambda_2}(2\sqrt{s_2x_2})$$
$$X\ G(s_1,s_2)\ ds_1 ds_2. \qquad \ldots \text{(c.2)}$$

4. Aplicaciones: (1) sea

$$p_1p_2\, F(p_1,p_2) = \frac{p_1p_2}{p_1^{\,2}-p_2^{\,2}} \doteqdot -\tfrac{1}{2}\, U(s_2-|s_1|) = G(s_1,s_2)$$

Por el Cor (c), tenemos si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (s_1s_2)^{-\frac{1}{2}}\; J_1(2\sqrt{s_1x_1})\; J_1(2\sqrt{s_2x_2})\; U(s_2-|s_1|)\, ds_1ds_2 = (x_1x_2)^{-\frac{1}{2}}\; U(x_1-|x_2|).$$

(2) $$p\, F(p) = p^{1-v}\, I_v(p) \doteqdot \frac{(1-s^2)^{v-1/2}}{\sqrt{\pi}\, 2^v\, \Gamma(v+\frac{1}{2})}\; U(1-s^2) \equiv G(s)$$

$$p^{-\lambda}\, F(1/p) = p^{\lambda-v}\; I_v(1/p) \doteqdot \frac{2^{-v}\, x^{\lambda}}{\Gamma(v+1)\,\Gamma(\lambda+1)}\; {}_0F_3(v+1,(\lambda+1)/2,\ (\lambda/2+1);\ x^2/16)\; U(\lambda)$$

Luego del Cor (c) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^{-\lambda/2}\,(1-s^2)^{v-1/2}\; J_\lambda(2\sqrt{sx})\; U(1-s^2)\, ds = \frac{\sqrt{\pi}\, x^{\lambda/2}\, \Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+1)\,\Gamma(\lambda+1)}\; {}_0F_3(v+1,(\lambda+1)/2,\lambda/2+1;\ x^2/16),\quad R(v) > -\tfrac{1}{2}.$$

Para concluir deseo expresar mi agradecimiento al Dr. S. C. Mitre por sus sugestiones y ayuda en la preparación de esta nota.

REFERENCIAS

1. CHATTERJEE, P.C. 1958.—Thesis for D. Phil. Degree. Calcutta University.

2. McLECHLAN, N. W.; HUMBERT, P., et POLI, L. 1950.—Memorial des Sciences mathematiques Fasc, C.

3. VANDER POL, B. and BREMMER, H. 1955.—Operational calculus based on two sided Laplace integral.

4. WATSON, G. N. 1944.—Bessel Fuction. Cambridge University Press.

5. GUPTA, R. K. 1964.—Vol. viii, Nos. 1-2, pp. 3-17. Rajasthan Academy of Sciences.