MES DE ENERO DE 1967 - CHARLAS

ECUACIONES Y SU SOLUCION POR ITERACION E INTERPOLACION

Por
ERICH MICHALUP

Se supone que se puede desarrollar en serie de TAYLOR la función

$$f\ (x_o + h) = O$$

y que tenga únicamente raíces simples. Si x_o es un valor aproximado de la raíz buscada y h la corrección requerida, se tendrá

$$O = f\ (x_o + h) = f\ (x_o) + h\ .\ f'\ (x_o) +$$
$$h^2\ .\ f''\ (x_o)/2! + h^3\ .\ f'''\ (x_o)/3! + \ldots$$

1. Limitándose a los primeros dos términos del desarrollo será

$$f + h\ .\ f' = O$$

o sea

$$h = -f/f' \qquad (N)$$

la fórmula de NEWTON. Renunciamos a la indicación del argumento siempre y cuando no haya posibilidad de confusiones.

2. Si se toman en consideración los primeros tres términos del desarrollo

$$f + h \cdot f' + h^2 \cdot f''/2 = O \qquad (A)$$

o sea

$$h \cdot f' = -(f + h^2 f''/2)$$

y si se substituye a la derecha h por la fórmula N se tendrá

$$h \cdot f' = - [f + (f)^2 f''/2 (f')^2]$$

o sea

$$h = -f (1 + f \cdot f''/2 f' f')/f'$$

e introduciendo el coeficiente de convergencia se obtiene

$$h = -f (1 + \varphi'/2)/f' \qquad (C)$$

la fórmula de CATALAN (3).

Una raíz de la ecuación $f(x) = O$ tiene que satisfacer también a la ecuación

$$x = x - f/f'$$

o sea

$$\varphi(x) = x - f/f'$$

y la primera derivada será

$$\varphi' = f \cdot f''/f' \cdot f'$$

que es el llamado coeficiente de convergencia, el cual debe ser muy pequeño en la proximidad de una raíz simple de la ecuación (13).

3. Si se toman los primeros tres términos de la serie en la forma

$$h = - f/(f' + h \cdot f''/2)$$

y si se substituye la fórmula de NEWTON y se introduce el coeficiente de convergencia, será

$$h = - f/f' (1 - \varphi'/2) \qquad (H)$$

la fórmula de HALLEY (6).

4. Sea

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

una función analítica que tiene un radio de convergencia $|x| < R$ y buscaremos una representación conforme de un recinto mayor para lograr una convergencia más rápida. Para este fin se escoje, como LINDELOF (10) la transformación de EULER

$$y = x/(x + s)$$

o sea

$$x = sy/(1 - y)$$

siendo s un parámetro cuyo valor fijaremos más tarde convenientemente. Se tendrá

$$x = sy + sy^2 + sy^3 + \ldots$$
$$x^2 = s^2y^2 + 2s^2y^3 + \ldots$$
$$x^3 = s^3y^3 + \ldots$$

y substituyendo resultará

$$f(x) = a_0 + a_1sy + a_1sy^2 + a_1sy^3 + a_2s^2y^2 + 2a_2s^2y^3 + a_3s^3y^3 + \ldots$$
$$= a_0 + a_1sy + sy^2(a_1 + a_2s) + sy^3(a_1 + 2a_2s + a_3s^2) + \ldots$$

Ahora se fija el valor del parámetro s de modo que el coeficiente de sy^2 se anule, o sea,

$$a_1 + a_2s = O$$

y despejando resultará

$$s = - a_1/a_2$$

Despreciamos los términos de grado superior a uno y quedará

$$f(x) = a_0 + a_1sy = a_0 + a_1(- a_1/a_2)\, x/(x - a_1/a_2)$$

o sea

$$f(x) = a_0 - a_1a_1x/(a_2x - a_1) = a_0a_1 - (a_0a_2 - a_1a_1)\, x/(a_1 - a_2x)$$

Aplicando esta transformación a la función dada

$$O = f + h \,.\, f' + h^2 f''/2 + \ldots$$

será

$$a_0 = f;\ a_1 = f';\ a_2 = f''/2;\ h = x$$

y se tendrá

$$O = f - f'f'h/(h \,.\, f''/2 - f')$$

y suponiendo el denominador diferente de cero será

$$f \,.\, h \,.\, f''/2 - f \,.\, f' = h \,.\, f' \,.\, f'$$

o sea

$$h = - f \,.\, f'/(f' \,.\, f' - f \,.\, f''/2)$$

y finalmente

$$h = - f/f'\,(1 - f \,.\, f''/2f' \,.\, f') = - f/f'\,(1 - \varphi'/2)$$

reencontrando la fórmula de Halley.

Para demostrar que esto tiene que ser el resultado al aplicar la transformación de LINDELOF, partimos de la identidad de EULER para transformar una serie de potencias en una equivalente fracción continua

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots =$$

$$a_0 + \frac{a_1x}{1} - \frac{a_2x/a_1}{1 + a_2x/a_1} - \frac{a_3x/a_2}{1 + a_3x/a_2} - \ldots$$

Tiene la reducida principal del orden "n" el mismo valor que la suma de los primeros $(n + 1)$ términos de la serie fijando en cero el orden de la reducida principal que se limita al primer término a_0.

Suponemos que x sea muy pequeño y, para obtener una aproximación, pondremos el último denominador parcial igual a la unidad, eso es, despreciamos la parte fraccionaria y así será la segunda reducida principal modificada

$$a_0 + a_1x/(1 - a_2x/a_1) = a_0 - a_1a_1x/(a_2x - a_1)$$

expresión que produce la fórmula de HALLEY según el desarrollo anterior.

5. Tomando en consideración un término más resulta como reducida principal modificada

$$a_0 + x\ [a_1a_2 + x\ (a_2a_2 - a_1a_3)/(a_2 - a_3x)]$$

y al aplicarla a la función dada resultará después de efectuar algunas transformaciones

$$h = 6f\ .\ f''/[2f\ .\ f''' - 6f'\ f'' + h\ (2f'\ f''' - 3f''\ f'')]$$

Al substituir en el denominador la incógnita "h" por la misma expresión, desarrollamos h en fracción continua; pero las expresiones serán más complicadas que las que se obtienen en el capítulo siguiente. Hay que tener presente, que tales desarrollos en fracción contínua producen un valor aproximado de la raíz de una ecuación del segundo grado. Debe mencionarse que al substituir "h" por la fórmula de NEWTON reencontraremos nuevamente la fórmula de HALLEY.

Llegaremos a la misma expresión arriba mencionada aplicando la transformación de LINDELOF a la parte entre paréntesis del desarrolo en serie de TAYLOR tomando en consideración un término más, o sea,

$$- f = h (f' + h \cdot f''/2 + h^2 f'''/6)$$

Encontró FRAME (5) por otro desarrollo en fracción continua la siguiente expresión de aproximación

$$h = - f [1 + \varphi' (1 - \varphi' - f \cdot f'''/3f' f'')/2]/f'$$

3. Si se escribe la serie de TAYLOR en la siguiente forma (11)

$$- f = h (f' + h \cdot f''/2)$$

resultará

$$h = - \frac{f}{f'} \frac{1}{1 + h \cdot f''/2f'}$$

Ahora se substituye la incógnita h en el denominador a la derecha cada vez por la misma expresión, o sea, desarrollaremos esta expresión en fracción contínua e introduciendo el coeficiente de convergencia será

$$h = - \frac{f}{f'} \left[\frac{1}{1} - \frac{\varphi'/2}{1} - \frac{\varphi'/2}{1} - \frac{\varphi'/2}{1} \cdots \right] = - \frac{f}{f'} \frac{N_n}{D_n}$$

Será la fórmula de recurrencia para los numeradores N_n y para los denominadores D_n de las reducidas principales

$$N_n = N_{n-1} - N_{n-2} \varphi'/2; \; D_n = D_{n-1} - D_{n-2} \varphi'/2$$

y se obtienen los siguientes valores:

$N_0 = D_0 = N_1 = 1$; $D_1 = N_2 = 1 - \varphi'/2$; $D_2 = N_3 = 1 - \varphi'$; $D_3 = N_4 = (1 - \varphi'/2)^2 - \varphi'/2$; $D_4 = N_5 = (1 - \varphi'/2)(1 - 3\varphi'/2)$; etcétera.

La reducida principal del orden cero es la fórmula de NEWTOM (N), y la siguiente resulta ser la fórmula de HALLEY (H). Generalmente hay que resolver ecuaciones de grado superior y por haber despreciado en el desarrollo las derivadas superiores, no vale la pena tomar en consideración reducidas de orden elevado y basta generalmente en estos casos limitarse a las segunda

$$h = - \frac{f}{f'} \frac{1 - \varphi'/2}{1 - \varphi'} \qquad \text{(MA)}$$

o tercera reducidas

$$h = -\frac{f}{f'} \frac{1 - \varphi'}{(1 - \varphi'/2)^2 - \varphi'/2} \qquad \text{(MB)}$$

7. Si se trata de una ecuación del grado n pondremos, como LAGUERRE (8)

$$f = - h\,(f' + h\,.\,f''/2)$$

Multiplicaremos esta ecuación por n y sumamos $h\,.\,f'$ en ambos lados

$$n\,.\,f + h\,.\,f' = - h\,(nf' + nhf''/2) + hf' =$$
$$- h\,[(n - 1)\,f' + nhf''/2]$$

Ahora elevamos ambos lados al cuadrado despreciando los términos en el corchete si el exponente de h es superior a uno

$$(nf + h\,.\,f')^2 = h^2\,[(n - 1)^2\,f'\,.\,f' + n\,(n - 1)\,h\,.\,f'\,f'' + \ldots]$$

y extrayendo la raíz

$$nf + hf' = \pm\, h \sqrt{(n - 1)^2\,(f')^2 + n\,(n - 1)\,f'\,h\,f''}$$

y al despejar h será

$$h = - nf \Big/ \left[f' \pm (n - 1)\,f' \sqrt{1 + n\,.\,h\,.\,f''/f'\,(n - 1)}\right]$$

o sea

$$h = - nf/f' \left[1 \pm (n - 1) \sqrt{1 + n\,.\,h\,.\,f''/(n - 1)\,f'}\right] \qquad \text{(L)}$$

Si se substituye en el radical h por una de las fórmulas de aproximación desarrolladas anteriormente, se obtendrá un valor aproximado para la corrección buscada.

8. Inversión de series:

Si se supone que la serie de potencias

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

sea convergente para $|\,x\,| < R$, puede expresarse x como serie de potencias de y en cierto intervalo

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots$$
$$x^2 = b_1y^2 + 2b_1b_2y^3 + \ldots$$
$$x^3 = (b_1)^3y^3 + \ldots$$

Substituimos en la serie de potencias y resultará

$$y = a_1b_1y + a_1b_2y^2 + a_1b_3y^3 + \dots$$
$$a_2b^2{}_1y^2 + 2a_2b_1b_2y^3 + \dots$$
$$a_3b^3{}_1y^3 + \dots$$

o sea

$$y = a_1b_1y + (a_1b_2 + a_2b^2{}_1)\ y^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b^3{}_1)\ y^3 + \dots$$

y comparando los coeficientes se tendrá

$$\begin{array}{ll} 1 = a_1b_1 & b_1 = 1/a_1 \\ 0 = a_1b_2 + a_2b^2{}_1 & b_2 = -\ a_2/(a_1)^3 \\ 0 = a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b^3{}_1 & b_3 = (2a^2{}_2 - a_1a_3)/(a_1)^5 \end{array}$$

etcétera.

Al aplicarlo a la serie de TAYLOR resultará

$y = -\ f;\ x = h;\ a_1 = f';\ a_2 = f''/2;\ a_3 = f'''/6;$ etc.

$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 \dots$

$x = h = -\ f/f' - (f)^2\, f''/2\ (f')^3 - (f)^3\ (2f''\ f''/4 - f'\ f'''/6)/(f')^5 \dots$

y después de algunas simplificaciones se tendrá

$$h = -\ f \left\{1 + \left[\varphi'\ (1 + \varphi') - (f)^2\ f'''/3\ (f')^3\right]/2\right\}/\ f' \qquad \text{(I)}$$

9. Buscaremos un procedimiento práctico para determinar las raíces reales de ecuaciones mediante una de las fórmulas mencionadas y supondremos que la ecuación

$$a_nx^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_o = 0;\ a_o,\ a_n \neq 0$$

tenga solamente raíces simples. Si a_n no es la unidad, se divide generalmente la ecuación entre a_n para lograr así una simplificación del trabajo.

Será el primer paso determinar el valor de f (x) para valores enteros, positivos y negativos, del argumento y encontrar así los intervalos en los cuales se encuentran raíces reales. Hay que tener en cuenta que algunas veces se requiere una subdivisión del intervalo unitario, si en determinado intervalo haya varias raíces.

Sea la ecuación

$$x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 23 = 0$$

Según la regla de DESCARTES tiene la ecuación ninguna o dos raíces positivas y substituyendo x por $(-\ x)$ se observa que tiene ninguna o dos raíces negativas. Formamos, basado en el procedimiento de HORNER el siguiente cuadro, únicamente para determinar el valor de f (x) correspondiente a los argumentos indicados. No se anotan los coeficientes de las ecuaciones para los argumentos escogidos, sino únicamente los valores numéricos que se requieren para encontrar el valor de f (x).

ARGUMENTO							
—4	1	—5	6	—22	111	=	f(—4)
—3	1	—4	— 2	8	— 1	=	f(—3)
—2	1	—3	— 8	18	—13	=	f(—2)
—1	1	—2	—12	14	9	=	f(—1)
0	1	—1	—14	2	23	=	f(0)
1	1	0	—14	—12	11	=	f(1)
2	1	1	—12	—22	—21	=	f(2)
3	1	2	— 8	—22	—43	=	f(3)
4	1	3	— 2	— 6	— 1	=	f(4)
5	1	4	6	32	183	=	f(5)

Vemos inmediatamente que esta ecuación tiene 4 raíces reales que se encuentran en la proximidad de los argumentos —3, —1, 1 y 4, por lo cual se han determinado los siguientes coeficientes de las 4 ecuaciones transformadas

ECUACION	h^4	h^3	h^2	h^1	h^0		
1ª	1	—13	49	—49	—1	=	0
2ª	1	— 5	— 5	23	9	=	0
3ª	1	3	—11	—25	11	=	0
4ª	1	15	70	98	—1	=	0

El desarrollo en serie de MAC LAURIN es

$$f\ (h) = f\ (0) + f'\ (0)\ h + f''\ (0)\ h^2/2 + f'''\ (0)\ h^3/3! + \ldots$$

y resultará que los coeficientes de la ecuación transformada serán iguales a las correspondientes derivadas f^n (0) divididas entre n!. Para simplificar el cómputo se anotan en el cuadro siguiente los valores de f, de las derivadas requeridas y de φ' de cada una de estas 4 ecuaciones.

ECUACION	f	f′	f″	f‴	f⁗	φ'
1ª	—1	—49	98	—78	24	— 2/49
2ª	9	23	—10	—30	24	— 90/529
3ª	11	—25	—22	18	24	—242/625
4ª	—1	98	140	90	24	— 5/343

Como se mencionó anteriormente debe ser muy pequeño el valor de φ' lo que no ocurre satisfactoriamente en las 2ª y 3ª ecuaciones, por lo cual determinaremos los coeficientes de otras ecuaciones transformadas y el aumento o la disminución requerida de la incógnita las encontramos por simple interpolación linear (2).

$$- f(-1) / [f(-1) - f(-2)] = -9/22 = -0{,}4$$
$$f(1) / [f(1) - f(2)] = 11/(11 + 21) = 11/32 = 0{,}4$$

y serán los coeficientes de las ecuaciones transformadas los siguientes:

ECUACION	h^4	h^3	h^2	h^1	h^0
21ª	1	—6,6	1,96	24,344	—0,6544
31ª	1	4,6	—6,44	—32,104	—0,5424

Los coeficientes de convergencia son pequeños y no tendrán sino en la tercera decimal la primera cifra diferente de cero.

Ahora hay que utilizar una u otra de las fórmulas de aproximación mencionadas anteriormente, una o varias veces, hasta obtener el valor de h con la exactitud deseada.

10. Si la ecuación es de grado elevado será generalmente muy laborioso la determinación de las derivadas sucesivas requeridas y si se desea lograr una aproximación muy satisfactoria, se puede utilizar con mucha ventaja el procedimiento de las medias cruzadas de JORDAN-AITKEN (1, 7) que es un método de interpolación linear reiterada.

Partimos de la fórmula de interpolación de NEWTON con diferencias divididas

$$f(x) = f(a) + (x - a) f(a, b) + (x - a)(x - b) f(a, b, c) + (x - a)(x - b)(x - c) f(a, b, c, d) + \ldots$$

las primeras diferencias divididas serán

$$f(a, b) = [f(b) - f(a)] / (b - a) = [f(a) - f(b)] / (a - b) = f(b, a)$$
$$f(a, b, c) = [f(b, c) - f(a, b)] / (c - a)$$
$$f(a, b, c, d) = [f(b, c, d) - f(a, b, c)] / (d - a)$$
$$f(a, b, c, d, e) = [f(b, c, d, e) - f(a, b, c, d)] / (e - a)$$

y resulta el siguiente cuadro de diferencias divididas

Cuadro A

ARGUMENTO	f(x)				
a	f(a)				
		f(a,b)			
b	f(b)		f(a,b,c)		
		f(b,c)		f(a,b,c,d)	
c	f(c)		f(b,c,d)		f(a,b,c,d,e)
		f(c,d)		f(b,c,d,e)	
d	f(d)		f(c,d,e)		
		f(d,e)			
e	f(e)				

Al substituir en la fórmula de Newton los argumentos a, b, c, d e, ... resultarán

Cuadro B

$$f(a) = f(a)$$
$$f(b) = f(a) + (b-a)\ f(a,b)$$
$$f(c) = f(a) + (c-a)\ f(a,b) + (c-a)\ (c-b)\ f(a,b,c)$$
$$f(d) = f(a) + (d-a)\ f(a,b) + (d-a)\ (d-b)\ f(a,b,c) + (d-a)\ (d-b)\ (d-c)\ f(a,b,c,d)$$

etcétera.

Se demostró (9) que las diferencias divididas son simétricas y por consiguiente, que no influye el orden de los argumentos.

Formamos otro cuadro de diferencias divididas especiales

Cuadro C

x	f(x)				
a	f(a)				
		f(a,b)			
b	f(b)		f(a,b,c)		
		f(a,c)		f(a,b,c,d)	
c	f(c)		f(a,b,d)		f(a,b,c,d,e)
		f(a,d)		f(a,b,c,e)	
d	f(d)		f(a,b,e)		
		f(a,e)			
e	f(e)				

y las primeras diferencias divididas especiales de cada columna resultarán iguales a las primeras diferencias divididas ordinarias porque

$$[f(a,c) - f(a,b)] / (c-b) = f(a,b,c) = [f(b,c) - f(a,b)] / (c-a)$$
$$[f(a,b,d) - f(a,b,c)] / (d-c) = f(a,b,c,d) =$$
$$[f(b,c,d) - f(a,b,c)] / (d-a) \text{ etcétera.}$$

Si se introduce la notación f (x; a, b, c, d, ...), muy parecida a la de MILNE THOMPSON (12) que representa la función interpolada cuyos valores coinciden con los valores de la función para los argumentos a, b, c, d, ... se tendrá

$$\begin{aligned}
f(x;a) &= f(a) \\
f(x;a,b) &= f(a) + (x-a)\, f(a,b) \\
f(x;a,c) &= f(a) + (x-a)\, f(a,c) \\
f(x;a,d) &= f(a) + (x-a)\, f(a,d) \\
f(x;a,b,c) &= f(a) + (x-a)\, f(a,b) + (x-a)\,(x-b)\, f(a,b,c) \\
f(x;a,b,c) &= f(a) + (x-a)\, f(a,c) + (x-a)\,(x-c)\, f(a,b,c) \\
f(x;a,b,d) &= f(a) + (x-a)\, f(a,b) + (x-a)\,(x-b)\, f(a,b,d) \\
f(x;a,b,d) &= f(a) + (x-a)\, f(a,d) + (x-a)\,(x-d)\, f(a,b,d)
\end{aligned}$$

etcétera.

Consiste el procedimiento de JORDAN-AITKEN en aplicar únicamente la interpolación linear pero reiteradamente:

$$\begin{gathered}
f(x;a,b) = f(a) + (x-a)\, f(a,b) = \\
f(a) + (x-a)\, [f(b) - f(a)] / (b-a) = \\
[(b-a)\, f(a) + (x-a)\, f(b) + (a-x)\, f(a)] / (b-a) = \\
[(b-x)\, f(a) - (a-x)\, f(b)] / (b-a)
\end{gathered}$$

o escrito en forma de determinante

$$f(x;a.b) = \begin{vmatrix} f(a) & a-x \\ f(b) & b-x \end{vmatrix} : (b-a)$$

Resulta por otro lado

$$\begin{gathered}
f(x;a,c) = f(a) + (x-a)\, f(a,c) = \\
f(a) + (x-a)\, [f(c) - f(a)] / (c-a) = \\
[(c-a)\, f(a) - (a-x)\, f(c) + (a-x)\, f(a)] / (c-a) = \\
[(c-x)\, f(a) - (a-x)\, f(c)] / (c-a)
\end{gathered}$$

y en forma de determinante

$$f(x;a,c) = \begin{vmatrix} f(a) & a-x \\ f(c) & c-x \end{vmatrix} : (c-a)$$

Anotaremos las dos igualdades más arriba mencionadas en forma más conveniente:

$$f(x;a,b,c) = f(x;a,b) + (x-a)\,(x-b)\,f(a,b,c)$$

$$f(x;a,b,c) = f(x;a,c) + (x-a)\,(x-c)\,f(a,b,c)$$

y al multiplicar la primera expresión por $(x - c)$ y la segunda expresión por $(b - x)$ y al sumar los resultados se elimina el último término y se tendrá

$$[(x-c) - (x-b)]\,f(x;a,b,c) = (x-c)\,f(x;a,b) - (x-b)\,f(x;a,c)$$

o simplemente

$$f(x;a,b,c) = \begin{vmatrix} f(x;a,b) & b-x \\ f(x;a,c) & c-x \end{vmatrix} : (c-b)$$

y análogamente

$$f(x;a,b,d) = \begin{vmatrix} f(x;a,b) & b-x \\ f(x;a,d) & d-x \end{vmatrix} : (d-b)$$

y por el mismo procedimiento se obtendrá

$$f(x;a,b,c,d) = \begin{vmatrix} f(x;a,b,c) & c-x \\ f(x;a,b,d) & d-x \end{vmatrix} : (d-c)$$

y así sucesivamente lo que permite formar el cuadro siguiente:

CUADRO D

					FACTOR
a	f(a)				a−x
b	f(b)	f(x;a,b)			b−x
c	f(c)	f(x;a,c)	f(x;a,b,c)		c−x
d	f(d)	f(x;a,d)	f(x;a,b,d)	f(x;a,b,c,d)	d−x
e	f(e)	f(x;a,e)	f(x;a,b,e)	f(x;a,b,c,e)	
				f(x;a,b,c,d,e)	e−x

Cada valor de este cuadro se obtiene por multiplifación cruzada y después por división del resultado entre la diferencia de argumentos, por lo cual ayuda en el trabajo práctico la anotación de los factores en la última columna.

Para ilustrar mejor el procedimiento confeccionamos los 4 cuadros para un ejemplo práctico.

Cuadro A

x	f(x)				
1	414				
		(127 − 414) / (2 − 1) = −287			
2	127		(−68 + 287) / (4 − 1) = 73		
		(−9 − 127) / (4 − 2) = −68		(13 − 73) / (7 − 1) = −10	
4	− 9		(−3 + 68) / (7 − 2) = 13		(1 + 10) / (12 − 1) = 1
		(−18 + 9) / (7 − 4) = −3		(23 − 13) / (12 − 2) = 1	
7	−18		(181 + 3) / (12 − 4) = 23		
		(887 + 18) / (12 − 7) = 181			
12	887				

y la comprobación de que las primeras diferencias divididas ordinarias y especiales de cada columna sean iguales resulta del

Cuadro B

1	414				
		(127 − 414) / (2 − 1) = −287			
2	127		(−141 + 287) / (4 − 2) = 73		
		(−9 − 414) / (4 − 1) = −141		(43 − 73) / (7 − 4) = −10	
4	− 9		(−72 + 287) / (7 − 2) = 43		(−5 + 10) / (12 − 7) = 1
		(−18 − 414) / (7 − 1) = −72		(33 − 73) / (12 − 4) = −5	
7	−18		(43 + 287) / (12 − 2) = 33		
		(887 − 414) / (12 − 1) = 43			
12	887				

Otra comprobación resulta del siguiente

Cuadro C

$$
\begin{aligned}
414 &= 414 \\
127 &= 414 - 1.287 \\
-9 &= 414 - 3.287 + 3.\ 2.73 \\
-18 &= 414 - 6.287 + 6.\ 5.73 - 6.\ 5.3.10 \\
887 &= 414 - 11.287 + 11.10.73 - 11.10.8.10 + 11.10.8.5.1
\end{aligned}
$$

y finalmente determinamos el valor de la función para el argumento x = 10 según el siguiente

Cuadro D

x_i	$f(x_i)$	(1)	(2)	(3)	(4)	$10 - x_i$
1	414					9
2	127	−2169				8
4	— 9	— 855	3087			6
7	—18	— 234	927	—1233		3
12	887	801	207	927	63 = f(10)	−2

Los términos en la columna (1) representan los valores obtenidos por interpolación linear, los de la columna (2) representan los valores obtenidos al tomar en consideración las segundas diferencias, o sea, obtenidos por interpolación cuadrática y así sucesivamente.

Comprobación de los cómputos:

$[9.127 - 8.414]/1 = -2169;$
$[9.(-9) - 6.414]/3 = -855;$
$[9(-18) - 3.414]/6 = -234;$
$[9.887 + 2.414]/11 = 801;$
$[3.927 - (-2)\ (-1233)]/5 = 63;$

$[8(-855) - 6(-2169)]/2 = 3087$
$[8(-234) - 3(-2169)]/5 = 927$
$[8.801 - (-2)\ (-2169)]/10 = 207$
$[6.927 - 3\ 3087]/3 = -1233$
$[6.207 - (-2)\ 3087]/8 = 927$

Se recomienda efectuar el cómputo conforme a este procedimiento con una máquina de calcular y hay que anotar únicamente los valores que figuran en el Cuadro D porque los denominadores aparecen siempre en la máquina, de la cual pueden copiarse.

Consideramos muy instructivo este ejemplo, porque demuestra que los valores sucesivos no permiten siempre una conclusión respecto del valor buscado. La función utilizada es

$$f(x) = x^4 - 24x^3 + 206x^2 - 752x + 983$$

Buscaremos ahora la solución de la ecuación

$$f(x) = 15{,}600.000\ (1 + x)^{-144} + 78.231\ [1 - (1 + x)^{-30}]/x + 1{,}014.000\ [1 - (1 + x)^{-144}]/[(1 + x)^{12} - 1] - 14{,}352.000 = 0$$

como lo hizo el autor en una clase dictada el 10 de junio de 1964 en la Universidad de Berna, Suiza. Esta ecuación resultó de un problema de matemáticas financieras. Determinamos a base de una tabla financiera (4) los valores de f (x) para argumentos (tasas) diferentes. Requiere la solución de este problema determinar el valor de x para el cual se cumpla aproximadamente f (x) = 0.

Como se trata de un caso de interpolación inversa, anotamos en la columna "argumento" el valor de la función multiplicada por 10^3 para hacer desaparecer la coma de decimal y en la columna "función" la tasa de interés correspondiente multiplicada por 10^7. El factor 10^7 no tiene influencia porque en cualquier cómputo entra tanto en el numerador como en el denominador.

Resulta el cuadro siguiente, al pie del cual anotamos algunos de los cálculos para hacer ver con más claridad el mecanismo de cálculo.

ARGUMENTO	FUNCION	(1)	(2)
1430 666 902	65625		
999 697 269	68750	7 599 889 581	
584 863 503	71875	619 680 445	6 475 830 773
185 503 036	75000	639 667 638	487 305 250

− 199 018 422	78125	659 849 041	498 941 892
− 569 308 119	81250	680 222 477	510 739 666
− 925 947 454	84375	700 785 708	522 697 430
−1269 493 076	87500	721 536 455	534 814 042

(3)	(4)	(5)	(6)
49 263 5147			
307 4250	28 469 816		
352 0462	527 288	438 959	
397 3743	585 610	438 114	44 031
443 4078	644 996	437 247	44 035

Comprobación del cálculo:

68750.1430 666 902 − 65625.999 697 269
——————————————— = 7 599 889 581

(1430 666 902 − 999 697 269 =) 430 969 633
que es el primer resultado anotado en la columna (1);
71875.1430 666 902 − 65625.584 863 503
——————————————— = 7 619 680 445

(1430 666 902 − 584 863 503 =) 845 803 399
que es el segundo resultado anotado en la columna (1);
75000.1430 666 902 − 65625.185 503 036
——————————————— = 7 639 667 638

(1430 666 902 − 185 503 036 =) 1245 163 866
que es el tercer resultado anotado en la columna (1)
78125.1430 666 902 + 65625.199 018 422
——————————————— = 7 659 849 041

(1430 666 902 + 199 018 422 =) 1629 685 324
que es el cuarto resultado anotado en la columna (1). Realmente anotamos en la columna (1) únicamente en el primer resultado la cifra inicial porque se repite en toda la columna, por lo cual no hay que utilizarla para determinar los valores de la columna (2).
619 680 445.999 697 269 − 599 889 581.584 863 503
——————————————— = 6 475 830 773

(999 697 269 − 584 863 503 =) 414 833 766
que es el primer resultado de la columna (2);
639 849 031.999 697 269 − 599 889 581.185 503 036
——————————————— = 6 487 305 250

(999 697 269 − 185 503 036 =) 814 194 233
que es el segundo resultado de la columna (2);
659 849 041.999 697 269 + 599 889 581.199 018 422
——————————————— = 7 498 941 892

(999 697 269 + 199 018 422 =) 1198 715 691

que es el tercer resultado de la columna (2) y así sucesivamente. En la columna (2) anotamos también únicamente en el primer resultado la cifra inicial porque se repite en toda la columna, por la cual no ha sido utilizado para determinar los valores de la columna (3). Se separaron en la columna (3) las primeras dos cifras, y lo mismo sucede en la columna (4). Las últimas dos cifras del resultado que se tomaron en consideración son las que figuran en la columna (6) y el mismo valor se hubiera obtenido al redondear los resultados de la columna (5). El resultado definitivo será, por consiguiente,

$$x = 0{,}007 \mid\mid 6 \mid\mid 49 \mid\mid 28 \mid\mid 44 = 0{,}007\ 649\ 2844.$$

OBRAS UTILIZADAS

1. AITKEN.—"On Interpolation by Iteration of proporcional parts without the use of differences". Proceedings, Edinburg, Math. Soc. Serie 2, Vol. III. 1932, pág. 56-76

2. BEUMIER.—"Note sur la méthode d'iteration de Newton". Annales de Sciences Economiques appliquées, Nº 2 Louvain, 1951.

3. CATALAN.—"Mélanges Mathématiques", Paris, 1855.

4. FÖRSTER.—"Simon Spitzers Tabellen für die Zinseszinsen und Rentenrechnung" Viena, 1933.

5. FRAME.—"The Solution of Equations by Continued Fractions". The American Mathematical Monthly, Vol. 60, Nº 5, 1953.

6. HALLEY.—"A new and general method of finding the roots of equations". Phil. Trans. Royal Society, London, 1694, Vol. 18, pág. 136.

7. JORDAN.—"Sur une formule d'interpolation". Congreso Internacional de Matemáticos, Bologna, 1928, Tomo VI, pág. 157.
"Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett", Metron, Vol. VII pág. 47, 1928.

8. LAGUERRE.—"Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une equation algébrique qui a toutes ses racines réelles", Nouvelles Annales de Matématiques, 2ª Série, Tom. XIX. Paris, 1880; y Oeuvres de Laguerre, Tomo 1, Paris 1898 pág. 87.

9. LIDSTONE.—"Notes on Interpolation", Journal of the Institute of Actuaries, Vol. LXVIII. Part II. Nº 321, pág. 267-296, Londres, 1951.

10. LINDELÖF.—"Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analitiques", Acta Societatis Fennicae, Tomo XXIV, Nº 7, Helsingfors, 1899.

11. MICHALUP.—"Nota sobre la tasa efectiva de empréstitos", Anales del Instituto Actuarial Argentino, Vol. V. Nº 8, Buenos Aires, 1964; "Iteration and Continue Fractions", Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1965, Uppsala.

12. MILNE-THOMSON.—"The Calculus of Finite Differences", pág. 76-78, Londres 1951.

13. RUNGE.—"Praxis der Gleichungen", pág. 56, Berlin, 1921.