CONSIDERACIONES ACERCA DE LA PARADOJA DE BERTRAND RUSSELL (*)

Por
ANDRES ZAVROTSKY
Trabajo presentado al Coloquio de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Noviembre de 1966.

Esta paradoja se refiere al *conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos;* y puede expresarse en las palabras siguientes: "El conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos es elemento de sí mismo, si no lo es, y no lo es, si lo es". Para abreviar la exposición, vamos a designar de aquí en adelante al conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos simplemente "conjunto de Bertrand Russell". Se conocen muchas graciosas variantes de esta paradoja, como por ejemplo el barbero de una aldea que afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos, el catálogo de todos los catálogos de una biblioteca que no se mencionan a sí mismos. En nuestra opinión, la solución de esta paradoja estriba en lo siguiente: No vacilaríamos en afirmar que la definición de *todo* conjunto cualquiera consiste en las dos propiedades siguientes: la de contener *todos* los elementos de cierta clase (que podremos llamar "propiedad A"), y la de contener *únicamente* los elementos de esta clase (que llamaremos "propiedad B"). Evidentemente, las propiedades A y B son independientes entre sí, porque a la propiedad A la satisface también cualquier conjunto que contenga al conjunto dado como subconjunto propio y a la propiedad B la satisface también cualquiera subconjunto propio del conjunto dado. La definición completa de un conjunto debería por lo tanto redactarse en la forma siguiente: es la intersec-

(*) Trabajo presentado al Coloquio de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Noviembre de 1966.

ción del conjunto de todos los conjuntos que contienen *todos* los elementos de cierta clase; y del conjunto de todos los conjuntos que contienen *únicamente* a los elementos de esta clase.

Ejemplo: La definición de un lugar geométrico como el conjunto de todos los puntos que gozan de cierta propiedad, y únicamente de los puntos que gozan de esta propiedad, comprende en realidad *dos* propiedades totalmente independientes una de otra, y que podremos designar, como antes, con las letras A y B. Así, a la definición "conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo *c* sea igual a la constante *r*, (propiedad A) que satisface también la figura dada en el "gráfico I"; y a la definición "conjunto únicamente de los puntos cuya distancia a un punto fijo *c* sea igual a *r* (propiedad B), le satisface también cualquiera arco de círculo. Luego, si queremos identificar la circunferencia, debebemos definirla como "intersección del conjunto de todos los conjuntos planos de puntos que contengan a *todos* los puntos distantes *r* de *c*, y del conjunto de todos los conjuntos planos de puntos que contengan *únicamente* a los puntos a una distancia *r* de *c*.

Veamos ahora si dicha intersección siempre existe; (a saber, la intersección del conjunto de todos los conjuntos que satisfacen a la propiedad A en sentido más general, y del conjunto de todos los conjuntos que satisfacen a la propiedad *correspondiente* B) y entonces veremos que precisamente en el caso del conjunto de Bertrand Russell dicha intersección es vacía. Efectivamente, para un conjunto cualquiera *c* postulémosle la propiedad A en el caso de Bertrand Russell:

Postulado A: El conjunto *c* contiene a *todos* los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

De este postulado inmediatametne se deduce el siguiente Teorema:

El conjunto *c* no satisface a la propiedad B en el caso Bertrand Russell o más concretamente: el conjunto *c*, además de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, también contiene algunos conjuntos que sí son elementos de sí mismos. *Fórmula I* (*la más corta*).

Demostración: El conjunto *c* se contiene a sí mismo. Prueba por reducción al absurdo: pues si no se contuviera, *c* sería un conjunto que no se contiene a sí mismo, y entonces no contendrá a *todos*

$$(A \in \mathfrak{A} \rightarrow \forall C(C \notin C \rightarrow C \varepsilon A) \& B \in \mathfrak{B} \rightarrow \forall C(C \varepsilon B \rightarrow C \notin C)) \rightarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 0$$

FORMULA II

$$\forall C(C \notin C \rightarrow C \varepsilon A) \rightarrow \exists C(C \varepsilon C \& C \varepsilon A)$$

FORMULA I

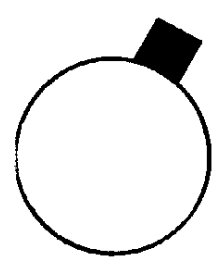

GRAFICO I

A. ZAVROTSKY

los conjuntos que no se contienen a sí mismos, contra la hipótesis, lo que queríamos demostrar.

Y si le postulamos para el conjunto *c* la propiedad B, podríamos demostrar como *teorema* que el conjunto *c* no satisface a la propiedad A, Teorema recíproco al anterior, que podría deducirse de aquel, fácilmente demostrable independientemente. Fórmula II (*la más larga*).

Ejemplo: En una aldea vive un barbero que afeita a *todos* los hombres que no se afeitan a sí mismos: ¿Quién afeita al barbero? Tomando este enunciado al pie de la letra, llegaríamos a la absurda conclusión que si el barbero se afeita a sí mismo, entonces no se afeita, y si no se afeita, entonces se afeita. Pero la solución consiste en que se hacen a propósito del barbero (como antes en el caso general de la paradoja de Bertrand Russell) *dos* postulados que se contradicen:

A) El barbero afeita a *todos* los hombres que no se afeitan a sí mismos.

B) El barbero afeita *únicamente* a los hombres que no se afeitan a sí mismos.

Efectivamente, admítase primero el postulado A. De él síguese inmediatamente el siguiente *Teorema*:

Además de los hombres que no se afeitan a sí mismos, el barbero afeita también al menos a un hombre que se afeita a sí mismo.

Demostración: (por reducción al absurdo): El barbero se afeita a sí mismo, pues de lo contrario no afeitará a *todos* los hombres que no se afeitan a sí mismos. Después de demostrado este teorema, ya es imposible enunciar el postulado B sin incurrir en una antinomia. Igualmente, si hubiéramos empezado por enunciar el postulado B, de este seguiría inmediatamente el teorema de que el barbero no afeita a *todos* los hombres que no se afeitan a sí mismos, pues en particular no puede afeitarse a sí mismos, pues en particular no puede afeitarse a sí mismo sin infringir al postulado A. En igual situación está el caso del catálogo que contiene *todos* los catálogos que no se contienen a sí mismos, y sólamente estos catálogos. Y si enunciamos estos dos problemas en la forma tradicional del alcalde de la aldea que ordena al barbero de afeitar a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos, y solamente a éstos, ó del director de la biblioteca que manda a su secretario a redactar un catálogo de todos los catálogos que no se contienen a sí mismos, y solamente a estos, tendríamos ya una antinomia jurídica en voz de la matemática, cosa de sobra conocida en la vida real.

Volvamos, sin embargo, del terreno jurídico al matemático. Hay otras paradojas análogas a la de Bertrand Russell que se resuelven por métodos parecidos. Tal es el caso del conjunto de todos los *pares*. El conjunto de todos los pares y el de todos los *ternos* constituyen un par, luego pertenecen al conjunto de todos los pares, de lo cual parece seguirse que el conjunto de todos los pares contiene al conjunto de todos los ternos. La solución se base en la misma distinción entre el conjunto de *todos* los pares (y tal vez de algo más...), y el conjunto *únicamente* de los pares (tal vez no todos). El primero contiene aún al conjunto de todos los ternos: el segundo no contiene el par formado por el conjunto de todos los pares y el de todos los ternos.

Otra famosa paradoja es la de los adjetivos homológicos y heterológicos.

Un adjetivo se llama homológico, si se califica a sí mismo, como v.gr. decalítero, pentasílabo, castellano, italiano; heterológico, si no se califica a sí mismo, como monosílabo, inglés. Ahora bien: ¿a qué categoría pertenece el adjetivo *heterológico?* Aplicando la definición al pie de la letra, llegaríamos a la conclusión de que este adjetivo es homológico, si es heterológico, y es heterológico, si es homológico. A esto se puede objetar que los conjuntos de los adjetivos homológicos y heterológicos están mal definidos. En efecto, los ejemplos citados (d—e—c—a—l—í—t—e—r—o, p—e—n—t—a—s—í—l—a-b—o, castellano, italiano) son tal vez los únicos casos de adjetivos verdaderamente homológicos que ocurren con cierta naturalidad, y se necesita un gran esfuerzo de ingenio para ampliar la lista. Para la mayoría aplastante de los demás adjetivos las definiciones de lo homológico y heterológico o no tienen ningún sentido del todo u ofrecen dudas. El adjetivo rojo es homológico; *rojo* decididamente heterológico; y ¿cuándo está enunciado en voz alta? ¿y los adjetivos "eufónico" y "cacofónico"? es cuestión de gusto.