EL GESSELIANO

A. Zavrotsky (*)

1.—Sean x_1; x_2;...; x_n *n* valores distintos de la variable *x*, y sean $y_i = f(x_i)$ (= ; 2;...; n) los valores correspondientes de una función desconocida. Se trata de hallar un polinomio

$$P_k(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_k x^k$$

de grado no superior a *k* de modo que se tenga

$$P_k(x_i) = y_i \, (i=1,; 2;...n),$$

lo que se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} a_o + a_1x_1 + a_2x^21 + \dots + a_kx_1^k = y_1 \\ a_o + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_kx_2^k = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_o + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_kx_n^k = y_n \end{array}$$

Si $n < k+1$, el sistema es indeterminado. Si $n = k+1$, el sistema es compatible y determinado, porque su determinante, si se toman a_1; a_2; ... a_k como incógnitas, y x_1; x_1^2... x_n^k como coeficientes, es del tipo de Vandermonde:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 \dots x_2^k \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^k \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(x_1-x_3). \quad (x_{n-1}-x_n) \neq 0,$$

(*) Miembro Correspondiente Nacional de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales.

Porque todos los valores $x_1; x_2; ...; x_n$ son distintos por hipótesis. Si $k \vee n-1$, el sistema es *generalmente* incompatible. Se puede entonces interpretar al polinomio $P_k(x)$ como función de mejor aproximación, por el método de los mínimos cuadrados, que como lo demostró Pearson (1), en el caso de un polinomio, y *únicamente en este caso*, equivale al de los momentos. Resolviendo el sistema auxiliar

$$\frac{\vartheta \sum_{j=1}^{n} | P_k(x_j)-y_j |^2}{\vartheta a_i} = 0 \ (i=0;1;2;..;k)$$

se forman las ecuaciones normales de Gauss.

$$na_o + a_1 \Sigma x_i + a_2 \Sigma x_i^2 + ... + a_k \Sigma x_i^k = \Sigma y_i \qquad (3)$$

$$a_o \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 + a_2 \Sigma x_i^3 + ... + a_k \Sigma x_i^{k+1} = \Sigma x_i y_i$$

....

$$a_o \Sigma x_i^k + a_1 \Sigma x_i^{k+1} + a_2 \Sigma x_i^{k+2} + + \Sigma a_k \Sigma x_i^{2k} = \Sigma x_i^k y_i$$

donde todas las sumatorias se entienden desde $i=1$ hasta $i=n$.

2.—Considérese ahora el caso particular de los valores equidistantes del argumento (en progresión aritmética), o sea cuando $x_2-x_1 = x_3-x_2... = x_n-x_{n-1}=h$. Por medio del cambio de variable $x=x_1+h(\bar{x}-1)$, los valores del nuevo argumento $\bar{x}$ se convierten en los enteros consecutivos 1,2,...,n, y las ecuaciones (3) se transforman en:

$$S_n^o a_o + S_n^1 a_1 + S_n^2 a_2 + ... + S_n^k a_k = \Sigma y_i \qquad (4)$$

$$S_n^1 a_o + S_n^2 a_1 + S_n^3 a_2 + ... + S_n^{k+1} a_k = \Sigma x_i y_i$$ (sumatorias desde $i=1$ hasta $i=n$).

....

$$S_n^k a_o + S_n^{k+1} a_1 + S_n^{k+2} a_2 + ... + S_N^{2k} a_k = \Sigma x_i^k y_i$$

donde en general para toda *n* y para toda *i*;

$$S_n^i = 1^i + 2^i + ... + n^i$$

o en forma matricial

$$|S| \quad |A| = |Y| \qquad (5)$$

donde $|A|$ y $|Y|$ son matrices columnas.

La expresión general de S_n^i se conoce: |2|

$$S_n^i = \frac{n^{i+1}}{i+1} + \frac{1\,n^i}{2} + \frac{in^{ni-1}}{12} - \frac{i(i-1)(i-2)n^{i-3}}{720} + \qquad (6)$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)n^{i-5}}{30240} - + - + - + \ldots$$

o introduciendo los números de Bernoulli | 3 |

$$S_n^i = \frac{n^{i+1}}{i+1} + \frac{1\,n^i}{2} + \frac{1}{2} B_1\, in^{i-1} - \frac{B_2 C_i^3 n^{i+3}}{4} + \frac{B_3 C_i^5 n^{i-5}}{6} - + - + \ldots \qquad (7)$$

Si i es par, *el último de este desarrollo contiene la primera potencia de n; si es impar, la segunda.* En particular:

$$S_n^o = n,\ S_n^1 = \frac{1}{2}\, n(n+1),\ S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_n^1)^2;$$

$$S_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},\ S_n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12};$$

$$S_n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},\ S_n^7 = \frac{n^2(N+1^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2);}{24}$$

$$S_n^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90};$$

$$S_n^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20} \text{ etc.}$$

Estas expresiones pueden simplificarse considerablemente, si se introducen los símbolos $y = n\ (n+1)$, $y' = 2n+1$:

$$S_n^1 = \frac{1}{2}\, y,\ S_n^2 = \frac{yy'}{6},\ S_n^3 = \frac{y^2}{4},\ S_n^4 = \frac{yy'(3y-1)}{30},\ S_n^5 = \frac{y^2(2y-1)}{12};$$

$$S_n^6 = \frac{yy'(3y^2-3y+1)}{42},\ S_n^7 = \frac{y^2(3y^2-4y+2)}{24},\ S_n^8 = \frac{yy'(5y^3-10y^2+9y-3)}{90}$$

$$S_n^9 = \frac{y^2(y-1)(2y^2-3y+3)}{20},\quad S_n^{10} = \frac{yy'(3y^3-7y^2+10y-5)(y-1)}{66} \text{etc.}$$

Además, están demostradas las relaciones siguientes: (4)

$$\frac{dS_n^{2i+1}}{dn} = 2iS_n^{2i},\ \frac{dS_n^{2i}}{dn} = (2i-1)S_n^{2i-1} + (-1)^i B_i,\ S_n^5 + S_n^7 = 2(S_n^3)^2;$$

$S_n^3 = (S_n^1)^2$, etc.

Considérese ahora el determinante de la matriz |S|, introducida en la ecuación (5), o sea el del sistema (4):

$$G_n^k = \begin{vmatrix} S_n^0 & S_n^1 & S_n^2 \ldots\ldots & S_n^k \\ S_n^1 & S_n^2 & S_n^3 \ldots\ldots & S_n^{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^k & S_n^{k+1} & S_n^{k+2} \ldots & S_n^{2k} \end{vmatrix} \tag{8}$$

llamado el *Gesseliano* en honor al profesor Ira Gessel quien lo descubrió. Designando con V_k al determinante *especial* de Vandermonde:

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & k+1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \ldots\ldots & (k+1)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^k & 2^k & 3^k \ldots\ldots & (k+1)^k \end{vmatrix} = 1!.2!.3!\ldots k! \tag{9}$$

|5|

y con H_k el determinante de Hilbert |6|:

$$H_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \ldots & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \ldots & \frac{1}{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+2} \ldots & \frac{1}{2k+1} \end{vmatrix} = \frac{V_k^4}{V_{2k+1}} \tag{10}$$

Demuéstrese la igualdad:

$$G_n^k = \frac{V_{n+k}\, V_{n-k-2}\, V_k^4}{V_{n-1}^2 .\, V_{2k+1}} \tag{11}$$

o en forma equivalente:

$$G_n^k = H_k n^{k+1}(n^2-1)^k(n^2-4)^{k-1}(n^2-9)^{k-2}\ldots(n^2-k-1^2)^2(n^2-k^2). \tag{12}$$

3.—Por cierto, algunos casos particulares de la fórmula (12) pueden comprobarse directamente, por ejemplo:

$$G_n^1 = \begin{vmatrix} n & \frac{1}{2}n(n+1) & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{2}\, n(n+1) & & \end{vmatrix} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} -$$

$$= n^2(n+1).\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}$$

de acuerdo con (12), tanto más que

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$$

Otro caso particular de (12) que ha sido demostrado, |7|:

$$G_n^{n-1} = V_{n-1}^2 \tag{13}$$

A primera vista, la fórmula (11) parece en este caso carecer de sentido, pues el factor V_{n-k-2} adquiere la forma V_{-1}. Pero transcribiendo (11) en la forma:

$$G_n{}^k = \frac{\left(\dfrac{V_{n+k}\, V_k^4)}{V_{n-1}\, V_{2k+1}}\right.}{\left(\dfrac{V_{n-1}}{V_{n-k-2}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{V_{n+k} V_k^4}{V_{n-1} V_{2k+1}}\right)}{\left(\dfrac{1!.2!.3\ldots(n-k-2)!.(n-k-1)!.(n-K)!\ldots(n-1)!}{1!\,.\,2!\,.\,3!\,\ldots.(n-k-2)!}\right.} = \tag{14}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{V_{n+k} V_k^4}{V_{n-1} V_{2k+1}}\right)}{(m-k-1)!.\,(n-k)!\ldots(n-1)!}$$

y poniendo ahora $k = n-1$, se obtiene:

$$G_n^{n-1} = \frac{\left(\dfrac{V_{2n-1} V_{n-1}^4}{V_{n-1} V_{2n-1}}\right)}{0!.\,1!.\,2!\ldots.(n-1)!} = \frac{V_{n-1}^3}{V_{n-1}} = V_{n-1}^2.$$

de acuerdo con (13). La fórmula (13) puede, además, deducirse directamente, elevando al cuadrado al determinante V_{n-1}.

4.—Pero la demostración general de (11) requiere varios lemas previos.

LEMA 1. G_n^k es polinomio en n de grado $(k+1)^2$, cuyo coeficiente dominante es H_k.

PRUEBA. Póngase $N(n) = 1+0(^1{}_n)$, donde $0(^1{}_n)$ compendia los términos con las potencias negativas de n. Luego, sustituyendo en (8) por cada S_n^i la expresión (6) ó (7), G_n^k se reduce a la forma:

$$G_n^5 = \begin{vmatrix} \dfrac{n^1}{1} N(n) & \dfrac{n^2}{2} N(n) & \dfrac{n^3}{3} N(n) & \ldots\ldots & \dfrac{n^{k+1}}{k+1} N(n) \\ \dfrac{n^2}{2} N(n) & \dfrac{n^3}{3} N(n) & \dfrac{n^4}{4} N(n) & \ldots\ldots & \dfrac{n^{k+2}}{k+2} N(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{n^{k+1}}{k+1} N(n) & \dfrac{n^{k+2}}{k+2} N(n) & \dfrac{n^{k+3}}{k+3} N(n) & \ldots & \dfrac{n^{2k+1}}{2k+1} N(n) \end{vmatrix} \tag{15}$$

Desarrollando (15) en una suma de $(k+1)!$ términos, se ve que en cada uno de ellos el exponente de n es igual a $1+3=5+\ldots\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$, y el coeficiente dominante, según (10), es H_k.

Designando con $X(C_n^k)$ la *característica* de un determinante (o sea, el orden máximo de su menor distinto de 0), se puede enunciar el siguiente:

LEMA 2. Si n k+1, entonces $X(G_n^k) = n$.

PRUEBA

a) Que $X(G_n^k) \geq n$, se ve por el hecho de que G_n^k contiene como menor principal de orden $\underline{n}$ á $G_n^{n-1} = V_{n-1}^2 \neq {}'0$.

b) Para demostrar que $X(G_n^k) \leq n$, obsérvese que

$$X(G_o^k) = X\ \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0\ \ \cdots \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix}\right)^1 = 0$$

y que $X(G_1^k) = X\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1\ldots. \\ 1 & 1 & 1\cdots \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \ldots. \end{matrix}\right) = 1$; supóngase inductivamente que

$X(G_n^k = n$, y averígüese si la misma relación subsiste aún para $n+1$. Pero G_{n+1}^k es determinante de tipo de Hankel en que toda paralela a la diagonal ascendente está compuesta de elementos iguales. Pero se sabe | 8 | que:

$$\begin{vmatrix} a_o & a_1 & a_2\ldots.. \\ a_1 & a_2 & a_3\ldots.. \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ao & \triangle a_o & \triangle^2 a_o\ldots\ldots \\ \triangle a_o & \triangle^2 a_o & \triangle a_o\ldots\ldots \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{vmatrix}$$

donde $\triangle a_o = a_1 - a_o$, $\triangle^2 a_o = a_2 - 2a + a_o, \ldots.,$ $\triangle^i a_o = a_i - ia_{i-1} + C_i^2 a_{i-2} - C_i^3 a_{i-3} + - \ldots + (-1)^j a_o$. En el caso particular de G_{n+1}^k se tiene

$$\triangle a_o = S_{n+1}^1 - S_{n+1}^o = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1) = S_n^1,\ \triangle^2 a_o = S_{n+1}^2 - 2S_{n+1}^1 + S_{n+1}^o =$$
$$= \sum_{j=1}^{n+1} j-1)^2 = S_n^2, \ldots..$$

y análogamente para toda i:

$$\triangle_{a_o}^i = S_{n+1}^1 - iS^{i+1}{}_{n+1} + C_i^2 S^{i+2}{}_{n+1} - + - + \ldots. + (-1)^j S_{n+1}^o = \sum_{j=1}^{i+1} (j-1)^j = S_n^i,$$

de modo que se tiene:

$$G^k_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+S^o_n & S^1_n & S^2_n \ldots\ldots \\ S^1_n & S^2_n & S^3_n \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Sea ahora M_{n+2} un minor de G^k_{n+1} de orden $n+2$. Si M_{n+2} no contiene el elemento $1+S^o_n$ (situado en la primera fila y la primera columna), entonces M_{n+2} pertenece a G^k_n y es igual a 0 por hipótesis inductiva. Si lo contiene, entonces se puede darle la forma:

$$M_{n+2} = \begin{vmatrix} S^o_n + 1 & S^1_n+0 & S^2_n+ \ldots\ldots \\ S^1_n & \boxed{M_{n+1}} & \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

donde M_{n+1} es minor de orden $n+1$. Descomponiendo ahora a M_{n+2} por los elementos de su primera fila, se le representa como suma de dos minores de G^k_n, uno de orden real $n+1$ y otro $N+2$, juntos iguales a cero por hipótesis inductiva.

Evidentemente, la característica de M_{n+2} queda invariante bajo la transformación lineal de Hankel. Luego $X(G^k_{n+1}) = n+1$, lo que completa la inducción.

LEMA 3. G^k_n se divide entre n^{k+1} $(n-1)^k \cdot (n-2)^{k-1} \ldots (n-k+1)^2(n-k)$.

ESCOLIO. Se trata de la divisibilidad *algebraica* de un polinomio entre la potencia de un monomio o binomio, y no de la aritmética, que no siempre se cumple gracias a la presencia del factor fraccionario H_k. Ejemplo: $S^1_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ siempre se divide entre el binomio $(n+1)$, pero $S^1_3 =$ no se divide entre $3+1=4$.

PRUEBA. Está demostrado |9| que si G^k_n es determinante de orden $(k+1)$ cuyos elementos son polinomios en n, y si n_o es valor de n tal que $X(G^k_{n_o}) = q < k+1$, entonces G^k_n se divide entre $(n-n_o)^{k+1-q}$ *o eventualmente entre otra potencia todvía más alta del binomio* $(n-n_o)$. Dándole a n_o sucesivamente los valores $0,1,2,\ldots,k$, se obtiene el enunciado del Lema 3. A este resultado se puede darle también otra forma:

$$G^k_n = n^{e_o}(n-1)^{e_1}(n-2)^{e_2}\ldots\ldots(n-k+1)^{e_{k-1}}(n-k)^{e_k}f(n)$$

donde

$$e_o \geq k+1,\ e_1 \geq k,\ e_2 \geq k-1, \ldots, e_{k-1} \geq 2,\ e_k \geq 1$$

LEMA 4. G_n^k es divisible entre:

$$n^{e_o}(n^2-1)^{e_1}(n^2-4)^{e_2} \ldots (n^2-k^2+2k-1)^{e_{k-1}}(n^2-k^2)^{e_k};$$

donde los exponentes e_o, $e_1 e_2, \ldots, e_k$ tienen el mismo significado que en el Lema 3.

PRUEBA. Considérese la expresión G^k_{-n}, si en la fórmula (8) n toma el valor de un entero negativo, entonces la definición $S_n^i = 1^i+2^i+\ldots+n^i$ pierde todo sentido, pero se puede aceptar como definición de S_n^i a la fórmula (6) o (7), y en este caso se tiene, si $i=0$, $S^o_{-n} = -n = = -(1+S^o_{n-1})$, y si $i > 0$,

$$S^i_{-n} = (-1)^{i+1}\left(\frac{n^{i+1}}{i+1} - \frac{1}{2}n^i + \frac{1}{2}B_1\, i n^{i-1} - + - + \ldots\right)$$
$$= (1-)^{i+1}(S_n^i - n^i) = (-1)^{i+1} S^i_{n-1},$$

y se tiene:

$$G^k_{-n} = \begin{vmatrix} -(1+S^o_{n-1}) & S^1_{n-1} & -S^2_{n-1} \ldots\ldots (-1)^{k+1}S^k_{n-1} \\ S^1_{n-1} & -S^2_{n-1} & S^3_{n-1} \ldots\ldots (-1)^k S^{k+1}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{k+1}S^k_{n-1} & (-1)^k S^{k+1}_{n-1} & (-1)^{k+1}S^{k+2}_{n-1} \ldots\ldots S^{2k}_{n-1} \end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera, la tercera, la quinta columna, &c., por -1, se tiene:

$$G^k_{-n} = \pm \begin{vmatrix} 1+S^o_{n-1} & S^1_{n-1} & S^2_{n-1} & S^3_{n-1} \ldots \\ -S^1_{n-1} & -S^2_{n-1} & -S^3_{n-1} & -S^4_{n-1} \ldots \\ S^2_{n-1} & S^3_{n-1} & S^4_{n-1} & S^5_{n-1} \ldots \\ -S^3_{n-1} & -S^4_{n-1} & -S^5_{n-1} & -S^6_{n-1} \ldots \end{vmatrix}$$

En seguida, multiplicando la segunda, la cuarta, la sexta fila, &c, por -1, se tiene:

$$G^k_{-n} = \pm \begin{vmatrix} 1+S^o_{n-1} & S^1_{n-1} & S^2_{n-1} \ldots S^k_{n-1} \\ S^1_{n-1} & S^2_{n-1} & S^3_{n-1} \ldots S^{k+1}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S^k_{n-1} & S^{k+1}_{n-1} & S^{k+2}_{n-1} \ldots S^{2k}_{n-1} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

El signo ambiguo "$\pm$" depende de la paridad de k, lo cual carece de importancia. De todo modo, reemplazando en la fórmula (16) n por $n-1$, se ve que el segundo miembro de (17) se reduce a $\pm\ G^k_{-n}$, y se tiene $G^k_{-n} = \pm\ G^k_n$. Luego en el Lema 3 al factor $(n-1)^{e_1}(n-2)^{e_2}....(n-k)^{e_k}$, le corresponde el factor $(n+1)^{e_1}(n+2)^{e_2}$ *con las mismas multiplicidades*, lo que completa la demostración del Lema 4.

Del Lema 4 se deduce:

$$G^k_n = n^{e_0}(n^2-1)^{e_1}(n^2-4)^{e_2}......(n^2-k^2+2k-1)^{e_{k-1}}(n^2-k^2)^{e_k}f(n)$$

donde los exponentes indeterminados e_i están, para $i=0,1,2,..., k$, acotados inferiormente por las desigualdades $e_i \geq k+1-i$. Pero como la suma de todos estos exponentes es igual a $2(1+2+3+...+k-1+k)+(k+1)=(k+1)^2$, que es, por el Lema I, el grado del polinomio G^k_n, luego los signos de desigualdad desaparecen: $f(n)$ se reduce a una constante. A base del mismo Lema 1, se tiene $f(n)=H_k$, lo cual completa la demostración de la fórmula (12), o de su equivalente (11).

La utilidad práctica de la fórmula (11) consiste en que permite ahorrar el cálculo directo del determinante G^k_n, sumamente engorroso aun para los valores moderados de k, ya que su desarrollo completo contiene $(k+1)!$ términos. Por ejemplo, si $k=10$, se tienen 39.916.800 términos.

5. Con atento permiso del Prof. Ira Gessel, de Massachusets Institute of Technology, citamos su prueba del mismo teorema, que, como es fácil ver, está basada en los principios totalmente independientes de los nuestros |11|.

Sea,

$$f(x,y) = \sum_{i,j>0} \frac{a_{ij}x^iy^j}{i!j!}$$

Sea:

$$D_{k(\phi)} = \begin{vmatrix} a_{oo} & a_{o1} \ldots\ldots a_{ok} \\ a_{1o} & a_{11} \ldots\ldots a_{1k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{ko} & a_{k1} \ldots\ldots a_{kk} \end{vmatrix}$$

LEMA 1. $D^k(f) = D^k(g(x)h(y)f)$, sean cuales fueren $g(x) = 1+b_1+b_2x^2...$ y $h(y) = 1+c_1y+c_2y^2+....$

LEMA 2. $D^k(f) = D^k(f(g(x), h(y)))$, sean cuales fueren $g(x) = x+b_2x^2+\dots$ y $h(y) = y+c_2y^2+\dots$

Estos lemas se demuestran fácilmente, interpretando a $D^k(g(x)h(y)f)$, &c., como operaciones sobre filas y columnas de $D^k(f)$.

LEMA 3. Sea $a_{ij} = a_{i+j}$, y $f(x) = \Sigma \dfrac{a_k x^k}{k!}$. Entonces $f(x+y) = f(x;y)$

La prueba consiste en un cálculo sencillo.

En el caso dado $a_k = 1^k + 2^k+\dots+n^k$, de modo que $f(x) = e^x + e^{2x}+\dots+e^{nx} =$

$= \dfrac{e^x(e^{nx}-1)}{e^x-1}$. Pero por el Lema 3:

$$f(x;y) = \frac{e^{x+y}(e^{n(x+y)}-1)}{e^{x+y}-1}$$

De acuerdo con el Lema 1, se puede multiplicar por $e^{-x}e^{-y}$, lo que da:

$$\frac{e^{n(x+y)}-1}{e^{x+y}-1}$$

De acuerdo con el Lema 2, se puede reemplazar x por $\log(1+x)$, y y por $\log(1+y)^{-1}$, lo que da:

$$\frac{\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^n-1}{\frac{1+x}{1+y}-1} = \frac{(1+x)^n-(1+y)^n}{(1+y)^{n-1}(x-y)}$$

De acuerdo con el Lema 1, se puede multiplicar por $(1+y)^{-n+1}$, lo que da:

$$\frac{(1+x)^n-(1+y)^n}{x-y}$$

De este modo:

$$D_n^k = \left| C_n^{i+j+1}.i!j! \right|_0^k = (1!2!\dots k!)^2. \left| C_n^{i+j+1} \right|_0^k$$

Este último determinante está bien conocido: véase, por ejemplo, |12| y |13|".

EJERCICIOS

Dejémosle a cargo del lector la demostración de las siguientes curiosas propiedades:

$$
(18) \qquad G^k_{n+1} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \;\; n+1 \;\; (n+1)^2 \cdots (n+1)^k \\ 1 & \\ n+1 & \\ (n+1)^2 & \boxed{\qquad G^k_n \qquad} \\ \vdots & \\ (n+1)^k & \end{vmatrix}
$$

$$
(19) \qquad G^k_{n+1} - G^k_n = \begin{vmatrix} S^2_n & S^3_n & \cdots & S^{k+1}_n \\ S^3_n & S^4_n & \cdots & S^{k+2}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S^{k+1}_n & S^{k+2}_n & \cdots & S^{2k}_n \end{vmatrix}
$$

$$
(20) \qquad G^k_n = \begin{vmatrix} S^2_{n-1} & S^3_{n-1} & \cdots & S^{k+1}_{n-1} \\ S^3_{n-1} & S^4_{n-1} & \cdots & S^{k+2}_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S^{k+1}_{n-1} & S^{k+2}_{n-1} & \cdots & S^{2k}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S^2_{n-2} & S^3_{n-2} & \cdots & S^{k+1}_{n-2} \\ S^3_{n-2} & S^4_{n-2} & \cdots & S^{k+2}_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S^{k+1}_{n-2} & S^{k+2}_{n-2} & \cdots & S^{2k}_{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \ldots\ldots + \begin{vmatrix} S^2_{k+1} & S^3_{k+1} & \ldots & S^{k+1}_{k+1} \\ S^3_{k+1} & S^4_{k+1} & \ldots & S^{k+2}_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S^{k+1}_{k+1} & S^{k+2}_{k+1} & \ldots & S^{2k}_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S^2_k & S^3_k & \ldots & S^{k+1}_k \\ S^3_k & S^4_k & & S^{k+2}_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S^{k+1}_k & S^{k+2}_k & \ldots & S^{2k}_k \end{vmatrix}
$$

TABLA DE LA FUNCION G^k_n

k \ n							
=	1	2	2	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	6	20	50	105	196
2	0	0	4	80	700	3.920	16.464
3	0	0	0	144	10.080	254.016	3.556.224
4	0	0	0	0	82.944	20.901.888	1.609.445.376
5	0	0	0	0	0	1.194.393.600	1.103.619.686.400
6	0	0	0	0	0	0	619.173.642.240.000
7	0	0	0	0	0	0	0

LA MISMA FUNCION FACTORIZADA

k \ n							
=	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	2^2	5	2.3	7
1	0	1	2.3	$2^2.5$	2.5^2	3.5.7	$2^2.7^2$
2	0	0	2^2	$2^4.5$	$2^2.5^2.7$	$2^4.5.7^2$	$2^4.3.7^3$
3	0	0	0	$2^4.3^2$	$2^5.3^2.5.7$	$2^6.3^4.7^2$	$2^7.3^4.7^3$
4	0	0	0	0	$2^{10},3^4$	$2^{12}.3^6.7$	$2^{12}.3^6.7^2.11$
5	0	0	0	0	0	$2^{16}.3^6.5^2$	$2^{18}.3^7.5^2.7.11$
6	0	0	0	0	0	0	$2^{24}.3^{10}.5^4$
7	0	0	0	0	0	0	0

REFERENCIAS

1. N. L. Johnson & H. Tetley, *Statistics,* Cambridge University Press, 1966, Vol. II, pág. 220.
2. H. Freeman, *Mathematics for Actuarial Students,* Cambridge University Press, 1939, Part. II, pág. 191.
3. J. V. Uspensky & V. A. Heaslet, *Elementary Number Theory,* Mc. Millan Book Co., New York & London 1939, pág. 254.
4. C. V. Durell, *Advanced Algebra,* G. Bell & Sons, Ltd., London 1961, Vol. I, pág. 48.
5. Man Duen Choi, *Tricks or Treats with the Hilbert Matrix, American Mathematical Monthly* 1983, Vol. 90, pág. 301.
6. J. W. Archbold, *Algebra,* Pitman Paperbacks, Bath 1970, pág. 425.
7. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie.* Chelsea Publishing Co., New York 1848 pág 63.
8. Ibidem. pág. 102.
9. R. A. Fracer, W. J. Duncan & A. R. Collar, *Elementary Matrices,* Cambridge University Press 1947, pág. 61.
10. G. U. Yule & M. G. Kendalle, *An Introduction to the Theory of Statistics,* 14-th Edition, Charles Griffin & Co., London 1968 pág 344.
11. Comunicado personal.
12. G. Andrews, The *Theory of Partitions,* pág. 183.
13. L. Carlitz, *Acta Arithmetica,* Vol. 13, pág. 29-47.