EFECTO TERMO-MAGNETICO EN LA ORIENTACION DEL FLUJO DE CRISTALES LIQUIDOS DE COLESTEROL AL PASAR UNA PLACA, DEBIDO A LOS GRADIENTES DE TEMPERATURA EN EL CAMPO TRANSVERSAL MAGNETICO

A. K. Sharma (*)

RESUMEN

Aquí se examinan los efectos termo-magnéticos causados por un campo magnético transversal y dos gradientes distintos de temperatura en dirección perpendicular al campo magnético sobre la orientación de las moléculas en el flujo de los cristales líquidos de tipo colestérico sobre una placa caliente. Se han obtenido expresiones analíticas para la orientación en tres casos diferentes y se ha discutido los resultados gráficamente.

1) INTRODUCCION

El problema de los cristales líquidos colestéricos sobre una placa infinita bajo un gradiente normal, de eje helicoidal fue primero estudiado por Leslie (1971). Sharma (1975), extendió luego su trabajo al flujo debido a dos temperaturas distintas en direcciones perpendiculares al eje de la hélice. En el presente trabajo hemos considerado el efecto del campo magnético transversal en el problema discutido por Sharma (1975) y examinado en detalle los efectos termo-magnéticos.

2) ECUACIONES BASICAS

Las leyes de conservación de cristales líquidos colestérico (1969) en ausencia de fuentes de calor son

$$v_{i,i} = o \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = PF_i + b_{ji,j} \tag{2.2}$$

(*) Department of Mathematics and Statistics, College of Basic Sciences and Humanities, G. B. Pant University of Agriculture and Technology, *PANTNAGAR-263 145,* Distt. Nainital (U.P.) *INDIA.*

$$\rho_1 \frac{D^2 d_i}{Dt^2} = \rho_1 G_i + g_i + \pi_{ji,j} \tag{2.3}$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = b_{ji} V_{i,j} + \pi_{ji} \frac{Dd_{i,j}}{Dt} - g_i \frac{Dd_i}{Dt} - q_{i,i} \tag{2.4}$$

Estas están complementadas por el siguiente grupo de ecuaciones constitutivas (1971).

$$b_{ji} + - p\delta_{ij} - \rho \frac{\delta F}{\delta d_{k,g}} d_{k,i} + \alpha l_{jkp}(d_p d_i)_{,k} + b_{ji,} \tag{2.5}$$

$$\pi_{ji} = \beta_g d_i + \varrho \frac{\delta F}{\delta d_{i,j}} + \alpha\, l_{ijk} d_k, \tag{2.6}$$

$$g_i = \gamma d d_i - \beta_j d_{i,j} - \varrho \frac{\delta F}{\delta di} - \alpha\, l_{ijk} d_{k,j} + g_i, \tag{2.7}$$

conjuntamente,

$$b_{ji_{\sigma\iota}} = \mu_1 d_k d_p A_{kp} d_i d_j + \mu_2 N_i d_j + \mu_3 N_j d_i + \mu_4 A_{ij} + \mu_5 A_{ik} d_k d_j +$$

$$\mu_6 A_{jk} d_k d_i + \mu_7 l_{ipq} d_\rho T_{\rho} d_j + \mu_8 l_{j\gamma q} d_\rho T_{,q} d_i \tag{2.8}$$

$$b\tilde{g}_i = \lambda_1 N_i + \lambda_2 A_{ik} d_k + \lambda_3 l_{i\rho q} d_\rho T_{,q} \tag{2.9}$$

$$q_i = k_1 T_{,i} + k_2 d_k T_k d_i + k_3 l_{ipq} d_\rho N_q + k_4\, l_{ipq} d_p A_{qk} d_k \tag{2.10}$$

$$2\varrho F = \alpha_1(d_{i,i})^2 + \alpha_2(\zeta + d_i l_{ijk} d_{k,j})^2 + \alpha_3 d_i d_j d_{k,i} d_{k,j}$$
$$+ (\alpha_2 + \alpha_4)[d_{i,j} d_{j,i} - (d_{i,i})^2], \tag{2.11}$$

donde,

$$2A_{ij} = \nu_{i,j} + \nu_{j,i}$$
$$2W_{ij} = \nu_{i,j} - \nu_{j,i} \tag{2.12}$$
$$N_i = \frac{Ddi}{Dt} - W_{ij} d_j.$$

Los símbolos indicados aquí tienen su significado usual.

El campo magnético $\vec{H}$ influencia los cristales líquidos de tipo colestérico por las fuerzas F_i y G_i que están dadas por (1976).

$$\rho F_i = (\tilde{a} H_k d_k d_j + \tilde{b} H_j) H_{j,i}, \tag{2.13}$$

$$\Sigma_1 G_i = a H_k d_k H_i, \tag{2.14}$$

a, b son los constantes de susceptibilidad magnética.

En el problema actual consideramos los coeficientes del material constante.

3) ESPECIFICACION DEL PROBLEMA

Consideremos el flujo de un cristal líquido incomprensible colestérico sobre una placa caliente infinita, en presencia de un campo magnético y dos gradientes distintos de temperatura. El cristal líquido está a una altura h sobre la placa y el campo magnético actúa perpendicularmente a la placa. Los gradientes de temperatura están presentes en dirección perpendicular al campo magnético.

Tomamos un sistema de coordenadas cartesianas dextroso (x, y, z) de modo tal que la placa y la superficie libre ocupen el plano Z=O y Z=h respectivamente. El eje de la hélice se supone está a lo largo del eje Z antes de la inducción del flujo, y el campo magnético H actúa a lo largo del eje. Luego

$$H_x = H_y = O, H_z = H. \tag{3.1}$$

también, la placa se mantiene a temperatura constante T_0y gradientes de temperatura a, b actúan a lo largo de los ejes x, l, y.

Siguiendo a Leslie (1971), buscamos soluciones de ecuaciones básicas en la forma

$$dx = \cos\Theta(z)\cos\varphi(z),\ dy = \cos\Theta(z)\sin\varphi z),\ dz = \sin\Theta(z),$$

$$v_x = U(z)\ v_y = v(z),\ vz = o,$$

$$\rho = \rho(z),$$

$$T = ax + by + \mathfrak{f}(z). \tag{3.2}$$

Las condiciones de borde propuesta por Leslie (1971) para tal tipo de flujo son:

$$\left.\begin{array}{ll} \Theta = o,\ \dfrac{d\varphi}{dz} = \zeta o, & \text{at} z = o \\ \dfrac{d\varphi}{dz} = o, (\alpha_2\cos^2\sigma + \alpha_3\sin^2\sigma)\ \dfrac{d\varphi o}{dz} = \alpha_2\zeta o, & \text{at } z = h \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = o, v = o, & \text{at } z = o \\ b_{zx} = o,\ b_{zy} = o, & \text{at } z = h \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{f} = To, & \text{at } z = o \\ a_z = o & \text{at } z = h \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Aquí,

$$\zeta o = \zeta - \frac{\alpha}{\alpha_2} \tag{3.6}$$

4) ECUACIONES DIFERENCIALES DETERMINABLES

La ecuación (2.1) se satisface claramente para los componentes de velocidad dadas por (3.2).

Las ecuaciones (2.2) a (2.4) en el caso presente se reducen a

$$\frac{db_{zx}}{dz} = o, \quad \frac{db_{zy}}{dz} = o, \quad \frac{db_{zz}}{d_z} = o, \tag{4.1}$$

$$\frac{d\pi_{zx}}{dz} + g_x = o, \tag{4.2}$$

$$\frac{d\pi_{zy}}{dz} + g_y = o, \tag{4.3}$$

$$\frac{d\pi_{zz}}{dz} + g_z + H^* \sin\varphi = o, \tag{4.4}$$

$$2(\Sigma_{zx}\xi = \Sigma_{zy}\eta) - \frac{dq_z}{dz} + o. \tag{4.5}$$

Aquí

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{du}{dz}, \eta = \frac{1}{2}\frac{dv}{dz}, H^* = aH^2. \tag{4.6}$$

Integrado (4.1), obtenemos

$$G_{zx} = k, G_{zy} = l, G_{zz} = m, \tag{4.7}$$

donde k, l, m son los constantes de integración. Insertando los valores de G_{zn}, G_{zy}, G_{zz}, (2.5), (2.8) evaluados por medio de (2.11), (2,12), (3.2) en (4.7), obtenemos.

$$\begin{aligned}&[H_1(\theta) + H_2(\theta)\cos^2 J]\,\xi = H_2(\theta)\text{sen}\varphi\cos\varphi\,\eta + H_3(\theta)\text{sen}\varphi\,\zeta \\ &- a\,H_5(b)\text{sen}\varphi\cos\varphi - b[H_4(\theta) - H_5(b)\cos^2\varphi] = k,\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$H_2(\theta)\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi\zeta + [H_1(\theta) + H_2(\theta)\mathrm{sen}^2\varphi]\,\eta - H_3(\theta)\cos\varphi\zeta$$
$$+\,a\,[H_4(\theta) - H_5(\theta)\mathrm{sen}^2\varphi] + b\,H_5(\sigma)\sin\varphi\cos\varphi = 1, \tag{4.9}$$

$$p = -m - F_1(\sigma)\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 - F_2(\sigma)\ \frac{d\varphi}{dz}\Big)^2 + \alpha_2\zeta\cos^2\sigma\,\frac{d\varphi}{dz}$$

$$+\,[H_3(\theta) + H_6(\theta)]\,(b\cos\varphi - a\sin\varphi)$$
$$+\,H_7(\theta)\,(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi). \tag{4.10}$$

Aquí,

$$\zeta = \frac{d\xi}{dz},$$

$$F_1(\theta) = \alpha\cos^2\theta + \alpha_3\sin^2\theta,$$
$$F_2(\theta) = (\alpha_2\cos^2\theta + \alpha_3\sin^2\theta)\cos^2\theta,$$
$$H_1(\theta) = \mu_4 + (\mu_5 - \mu_2\sin^2\theta,$$
$$H_2(\theta) = (2\mu_1\sin^2\theta + \mu_3 + \mu_6)\cos^2\theta,$$
$$H_3(\theta) + \mu_7\sin\theta\cos\theta,$$
$$H_4(\theta) + \mu_7\sin^2\theta,$$
$$H_5(\theta) = \mu_8\cos^2\theta,$$
$$H_6(\theta) = \mu_8\sin\theta\cos\theta,$$
$$H_7(\theta) = (2\mu_1\sin^2\theta + {}_2 + {}_3 + \mu_5 + \mu_6)\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta. \tag{4.11}$$

En la ecuación de energía (4.5) los dos primeros términos representan el calor viscoso y son cuadráticos en ξ, η, ζ, a, b en tanto que los dos últimos son lineales en ellos. Por lo tanto despreciando los primeros, obtenemos.

$$\frac{dq_z}{dz} = 0.$$

Integrado ésta da

$$q_z = r, \qquad (4.12)$$

r, es una constante de integración sustituyendo el valor de q_z en ella obtenemos

$$K_1(\theta)\zeta + K_2(\theta)(\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi) + K_3(\theta)(a\cos\varphi + b\sin\varphi) = r, \qquad (4.13)$$

donde

$$K_1(\theta) = k_1 + k_2\sin^2\theta,$$

$$K_2(\theta) = (k_3 - k_4)\sin\theta\cos\theta,$$

$$K_3(\theta) = k_2\sin\theta\cos\theta. \qquad (4.14)$$

Como la superficie interior es una superficie libre, las condiciones de borde (3,4), (3,5) implican que

$$k = 1 = r = 0.$$

Por lo tanto resolviendo (4.8), (4.9), (4.13) para ξ, η, ζ, obtenemos

$$\xi = a\sin\varphi\cos\varphi\,[G_1(\theta) + G_2(\theta)] + b\,[G_2(\theta)\sin^2\varphi - G_1(\theta)\cos^2\varphi], \qquad (4.15)$$

$$\eta \quad a\,[G_1(\theta)\sin^2\varphi - G_2(\theta)\cos^2\varphi] - b\sin\varphi\cos\varphi\,[G_1(\theta) + G_2(\theta)], \qquad (4.16)$$

$$\zeta = -(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\,G_3(\theta) \qquad (4.17)$$

Aquí,

$$G_1(\theta) = \frac{[H_5(\theta) - H_4(\theta)],}{[H_1(\theta) + H_2(\theta)]}$$

$$G_2(\theta) = \frac{[K_1(\theta)H_4(\theta) + K_3(\theta)H_3(\theta)],}{[K_1(\theta)H_1(\theta) - K_2(\theta)H_3(\theta)]}$$

$$G_3(\theta) = \frac{[K_3H_1(\theta) + K_2(\theta)H_4(\theta)]}{[K_1(\theta)H_1(\theta) - K_2(\theta)H_3(\theta)]} \qquad (4.18)$$

Llevando los valores πzx, πzy, πzz, gn, gy, gz, a las ecuaciones (4,2) a (4.4) y eliminando γ entre ellas, obtenemos las ecuaciones θ y φ como

$$2F_1(\sigma)\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{d}{d\theta}F_1(\theta)\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2-\frac{d}{d\theta}F_2(\sigma)\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2-4\alpha_2\zeta\sin\theta\cos\theta\ \frac{d\varphi}{dz}$$

$$+(\lambda_1+\lambda_2\cos2\theta)(\zeta\cos\varphi+\eta\sin\varphi)$$

$$-2\lambda_3(a\sin\varphi-b\cos\varphi)+H^*\sin2\theta=o, \qquad (4.19)$$

$$F_2(\sigma)\frac{\delta^2\varphi}{dz^2}+\frac{d}{d\sigma}F_2(\sigma)\frac{d\theta}{dz}\ \frac{d\varphi}{dz}+2\alpha_2\zeta\sin\theta\cdot\cos\ \frac{d\theta}{dz}$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\sin\theta\cos\theta\,(\zeta\sin\varphi-\eta\cos\varphi)-\lambda_3\zeta\cos^2\theta$$

$$-\lambda_3\sin\theta\cos\theta\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi)=o. \qquad (4.20)$$

5) SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA BAJOS GRADIENTES DE TEMPERATURA Y CAMPO MAGNETICO DEBIL

En el caso de bajos gradientes de temperatura y campo magnético débil, se puede asumir la solución para φ en la forma

$$\varphi(z)=(\zeta_o z+\varphi_o)+a\varphi_1(z)+b\varphi_2(z)+H^*\varphi_3(z)+O(a^2,...,ab,...) \qquad (5.1)$$

Con expresiones similares para u, v, f, θ

Linearizando (4.15) a (4.17), (4,19), (4,20), obtenemos

$$\frac{du}{dz}=2\mu\cos(\zeta_o z+\varphi_o)[a\sin(\zeta z+\varphi_o)-b\cos(\zeta_o z+\varphi_o)], \qquad (5.2)$$

$$\frac{dv}{dz}=2\mu\sin(\zeta_o z+\varphi_o)[a\sin(\zeta_o z+\varphi_o)-b\cos(\zeta_o z+\varphi_o)], \qquad (5.3)$$

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dz}=o, \qquad (5.4)$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{[H^*-\zeta_o(2\alpha+\alpha_3\zeta_o)]\Theta}{\alpha_1}\theta$$

$$+\left[\frac{(\lambda+\lambda_2)\mu_8-\lambda_3(\mu_3+\mu_4+\mu_6)}{\alpha_1(\mu_3+\mu_4+\mu_6)}\right][a\sin(\zeta_o z+\varphi_o)-b\cos(\zeta_o z\ \varphi_o)]=o, \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=o. \quad (5.6)$$

Aquí,

$$\mu=\frac{\mu}{\mu_3+\mu_4+\mu_6} \quad (5.7)$$

Las soluciones para (5.2) a (5.4), (5.6) sometidas a las condiciones de borde (3.3) a (3.5) son

$$\mu_4=\left(\frac{\mu}{\zeta_o}\right)\left[\sin(\zeta oz)[a\sin(\zeta_o z+2\varphi_o)-b\cos(\zeta_o z+2\varphi_o)]-b(\zeta_o z)\right], \quad (5\ 8)$$

$$v=\left(\frac{\mu}{\zeta_o}\right)\left[a(\zeta_o z)-\sin(\zeta_o z)[a\cos(\zeta_o z+2\varphi_o)+b\sin(\zeta z+2\varphi_o)]\right], \quad (5.9)$$

$$\text{∮}+T_o, \quad (5.10)$$

$$\varphi=\zeta_o z+\varphi_o. \quad (5.11)$$

Esas soluciones son similares a las obtenidas por Sharma (1975) para el flujo de bajos gradientes de temperatura sobre una placa. Implica por consiguiente que el campo magnético débil no influencie u, v, f y φ.

Sustituyendo $\xi=\zeta_o z$, la ecuación (5.5) se transforma en la forma adimensional

$$\frac{d\theta^2}{d\xi^2}+\frac{[H^*-\zeta_o(2\alpha+\alpha_3\zeta_o)]}{\alpha_1\zeta_o^2}\theta=M[a\sin(\xi+\varphi_o)-b\cos(\xi+\varphi_o)]. \quad (5.12)$$

Aquí,

$$M=\frac{\lambda_3(\mu_3+\mu_4+\mu_6)-(\lambda_1+\lambda_2)\mu_8}{\alpha_1\zeta_o^2(\mu_3+\mu_4+\mu_6)} \quad (5.13)$$

Determinaremos ahora las soluciones de esta ecuación cuando H^* (>, =, <) $\zeta_0(2x + \alpha x_3 \zeta_0)$. El coeficiente α, del material se toma como positivo (1960). Las soluciones en tres casos son respectivamente son:

$$\theta^* = \frac{1}{B^2-1}\Bigg[\frac{a}{b}\sin(\xi+\varphi_0) - \cos(\xi+\varphi_0)$$

$$-\left(\frac{a}{b}\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0\right)\cos[B(\xi-\zeta_0 h)]\sec(B\zeta_0 h)$$

$$-\frac{1}{B}\left[\frac{a}{b}\cos(\zeta h+\varphi_0) + \sin(\zeta_0 h+\varphi_0)\right]\sin(B\xi)\sec(B\zeta_0 h)\Bigg],$$

$$\theta^* = \xi\left[\frac{a}{b}\cos(\zeta_0 h + \varphi_0) + \sin)\zeta_0 h+\varphi_0)\right]$$
$$-\left[\frac{a}{b}\sin(\xi+\varphi_0) - \cos(\xi+\varphi_0)\right]$$

$$+\left(\frac{a}{b}\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0\right), \tag{5.15}$$

$$\theta^* = \frac{1}{C(C^2+1)(e^{C\zeta_0 h}+e^{-C\zeta_0 h})}\Bigg[C\left[{}_eC(\xi-\zeta_0 h)_{+e}-C(\xi-\zeta_0 h)\right]\left(\frac{a}{b}\sin\varphi_0-\cos\varphi_0\right)$$

$$+(e^{c\xi}-e^{-c\xi})\left[\frac{a}{b}\cos(\zeta_0 h + \varphi_0) + \sin(\zeta_0 h + \varphi_0)\right]$$
$$+C(e^{C\zeta_0 h}+e^{-C\zeta_0 h})\left[\cos(\xi+\varphi_0) - \frac{a}{b}\sin(\xi+\varphi_0)\right]\Bigg]. \tag{5.16}$$

Aquí,

$$\theta^* = \frac{\theta}{Mb}$$

$$B^2 = \frac{H^* - \zeta_0(2\alpha+\alpha_3\zeta_0)}{\alpha\zeta_0^2}$$

$$C^2 = \frac{\zeta_0(2\alpha+\alpha_3\zeta_0) - H^*}{\alpha_1\zeta_0^2} \tag{5.17}$$

6) RESULTADOS NUMERICOS DE LA DISCUSION

Para obtener ideas definidas en el comportamiento θ^* en el campo termomagnético, consideramos el caso $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ y $\zeta_0 h = 1$.

Como la ecuación (5.14) contiene ambos parámetros de influencia B y $\frac{a}{b}$, se considera primero para B constante y para diferentes valores de $\frac{a}{b}$. La figura 1 indica el comportamiento. Se observa que la orientación θ^* aumenta con el incremento de $\frac{a}{b}$, en tanto que cuando $\frac{a}{b}$ es constante, B aumenta. La figura 2 muestra que la orientación θ^* decrece. Como la ecuación (5.15) sólo contiene un factor de influencia $\frac{a}{b}$, siendo B cero en este caso, lo consideramos para diferentes valores de $\frac{a}{b}$. En la figura 3 los perfiles de orientación en este caso implican que el valor $\frac{a}{b}$ conduce a un decrecimiento en el valor de la orientación; finalmente la figura 4, corresponde una C constante y aumenta de los valores de $\frac{a}{b}$ en el caso de la ecuación (5.16), indica una disminución de θ^*, en tanto que se observa un incremento de θ^* cuando aumenta c y $\frac{a}{b}$ se conserva constante (Fig. 5).

RECONOCIMIENTO

El autor da las gracias al Dr. S. C. Malaviya, Decano del Colegio de Ciencias Básicas de Humanidades por las facilidades concedidas para la preparación de este trabajo.

REFERENCES

1. *Ericksen, J. L.* (1966). "Inequalities in liquid crystal theory" (Phys. Fluids *9*, 1205-1207).

2. *Leslie, F. M.* (1969). "Continuum Theory of cholesteric liquid crystals" (Mol. Cryst. Liquid Cryst. *7*, 407-420).

3. *Leslie, F. M.* (1971). "Thermo-mechanical coupling in cholesteric liquid crystals" (Symposium of the Chemical Society, Faraday Division *5*, 33-40).

4. *Paria, G. and Sharma, A. K.* (1976). "Effect of static magnetic field on the helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities" (Journal of the Australian Mathematical Society Vol. XIX - (series B) - part 3, 371-380).

5. *Sharma, A. K.* (1975). "Flow of cholesteric liquid crystal over a plate due to temperature gradients" (University of Indore Research Journal (Science), Vol. III, N° 2, pp. 13-16).

TITULOS PARA LAS FIGURAS

Fig. 1.—Variación en la orientación θ^* con distancia ξ de B=30 con $\frac{r}{b}$ desde 0 — 0 a0, r0.

Fig. 2.—Variación en la orientación θ^* con distancia $\frac{a}{b} = 2{,}00$ con B desde 0,0001 a 0,50.

Fig. 3.—Variación en la orientación θ^* con distancia ξ para B=0 desde $\frac{a}{b} = 0{,}0$ a 0,3.

Fig. 4.—Variación en la orientación θ^* con distancia para C=30 con $\frac{a}{b} = 0{,}00$ a 0,20.

Fig. 5.—Variación en la orientación θ^* con distancia ξ para $\frac{a}{b}$ 0,00 para C=0,001 a 0,5.