

NUMEROS DE FIBONACCI, POLINOMIOS DE CHEBICHEFF Y EL NUMERO π (*)

Darío Castellanos Guédez (**)

SINOPSIS.

Este artículo discute algunas relaciones nuevas y curiosas entre los números de Fibonacci y los polinomios de Chebicheff. Los resultados obtenidos conducen a un método general para el desarrollo de funciones en serie de otras funciones con números de Fibonacci como coeficientes. Entre los ejemplos obtenidos mostramos una serie nueva para el arco tangente que provee ciertas series rápidamente convergentes para el cálculo de π .

Sección 1.

NUMEROS DE FIBONACCI Y POLINOMIOS DE CHEBICHEFF.

Las propiedades de los números de Fibonacci se conocen desde hace mucho tiempo. Su origen se remonta al año 1202 con la publicación del *Liber Abaci* por el matemático italiano Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo de Fibonacci, forma abreviada de Filius Bonacci, o sea *hijo de Bonacci*.

Fibonacci aparentemente tenía un sentido del humor aparte de sus talentos matemáticos: Liber era un dios latino, hijo de Ceres y hermano de Proserpina. Los romanos asimilaron este dios a Baco o Dionisos, el dios griego del vino. Festivales, llamados Liberalia, se celebraban anualmente honrando a *Liber Bacus*. Como *Liber Abaci* quiere decir Libro del Abaco, y ábaco en latín es *abacus*, Fibonnaci parece haberse entretenido, en una época de fuerte dominación por la iglesia católica romana, en haber titulado su libro en una forma reminiscente de un dios pagano del vino y la fertilidad.

(*) Trabajo distinguido con Mención Honorífica. Premio Anual de Investigación "Fundación CJM", 1983.

(**) Area de Estudios de Postgrado Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.

Fibonacci no descubrió ninguna de las propiedades de la sucesión que lleva su nombre. El se limitó a proponer, y a resolver, en el *Liber Abaci*, el problema de cuántos conejos nacerían en un año a partir de una pareja de conejos. Con ciertas suposiciones naturales acerca de los hábitos de procreación de los conejos, la población de parejas por mes corresponde a los elementos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc., donde comenzando con cero y uno cada término es la suma de los dos anteriores.

Con el curso del tiempo esta sucesión aparecería en tantas áreas sin relación alguna con la cría de conejos que en 1877 Edward Lucas propuso que se la llamara Sucesión de Fibonacci, y a los números que la integran, Números de Fibonacci. Es tal la fertilidad de esta sucesión que en Estados Unidos se edita regularmente el *Fibonacci Quarterly*, publicación que recoge las numerosas curiosidades que se descubren cada año relativas a los números de Fibonacci.

A pesar de este preámbulo es, quizás, sorprendente encontrar unas relaciones nuevas e inesperadas entre números de Fibonacci y los polinomios de Chebicheff. Procedamos a su deducción.

La relación conocida [1] para los polinomios de Chebicheff de primera especie:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n], \quad (1)$$

da con $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$\frac{2}{\sqrt{5}} T_n\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]. \quad (2)$$

Para n impar esta relación coincide con la fórmula de Binet[2] para los números de Fibonacci:

$$v_n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]. \quad (3)$$

Obtenemos así,

$$v_{2n+1} + \frac{2}{\sqrt{5}} T_{2n+1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \quad (4)$$

La siguiente relación es conocida[2],

$$t(1-t-t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n. \quad (5)$$

En esta ecuación cambiemos a t por $-t$ y sumemos (5) a la expresión resultante. Obtenemos así,

$$t^2(t^4-3t^2+1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n} t^{2n}. \quad (6)$$

En la expresión[1]:

$$(1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad (7)$$

donde los $U_n(x)$ son polinomios de Chebicheff de segunda especie, obtenemos luego de cambiar a x por $-x$, recordando que $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$, y restando la serie resultante de (7),

$$2x(t^4+2(1-2x^2)t^2+1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n+1}(x)t^{2n}.$$

Haciendo $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ obtenemos

$$t^2(t^4-3t^2+1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} U_{2n+1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t^{2n+2}.$$

Reemplazando a n por $n-1$ y comparando la expresión resultante con la ecuación (6) obtenemos,

$$v_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} U_{2n-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad n \geq 1. \quad (8)$$

La relación[1]:

$$T_n(x) = U_n(x) - x U_{n-1}(x), \quad (9)$$

da, luego de cambiar a n por $2n+1$, hacer $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, y utilizar (4) y (8),

$$v_{2n} + v_{2n+2} = U_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right). \quad (10)$$

La ecuación (9) da, luego de cambiar a n por $2n$, hacer $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, y utilizar (4) y (8),

$$\frac{v_{2n+1} + v_{2n-1}}{2} = T_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right). \quad (11)$$

Las ecuaciones (4), (8), (10) y (11) relacionan todos los polinomios de Chebicheff de argumento $\sqrt{5}/2$ con números de Fibonacci.

Identidades que relacionan polinomios de Chebicheff conducen a identidades para números de Fibonacci. Por ejemplo, la relación[3]

$$\sum_{m=0}^{n-1} T_{2m+1}(x) = \frac{1}{2} U_{2n-1}(x)$$

da con $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, el resultado conocido[2]

$$\sum_{m=0}^{n-1} v_{2m+1} = v_{2n}.$$

La ecuación[3]:

$$2(1-x^2) \sum_{m=1}^n U_{2m-1} = x - T_{2n+1}(x),$$

da con $x = \sqrt{5}/2$ el resultado conocido[2]

$$\sum_{m=1}^n v_{2m} = v_{2n+1} - 1.$$

La relación[3]

$$2 T_n(x) U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x),$$

da con n reemplazo por $2n + 1$ y $x = \sqrt{5}/2$,

$$\frac{v_{4n+2}}{v_{2n+1}} = U_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right),$$

que puede escribirse

$$\frac{v_{4n+2}}{v_{4n+1}} \cdot \frac{v_{4n+1}}{v_{4n}} \dots \frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = U_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right). \quad (12)$$

Como[2]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y la ecuación (12) tiene $(4n + 2) - (2n + 1) = 2n + 1$ factores, obtenemos la siguiente aproximación,

$$U_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cong \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1}. \quad (13)$$

Comparando (13) y (3) obtenemos la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{5}} U_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cong v_{2n+1}. \quad (14)$$

Comparando (2) y (3) da también la aproximación

$$\frac{2}{\sqrt{5}} T_{2n} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cong v_{2n}. \quad (15)$$

Las ecuaciones (10) y (11) se combinan con las ecuaciones (14) y (15) para dar la interesante relación aproximada

$$\frac{v_{n-1} + v_{n+1}}{\sqrt{5}} \cong v_n. \quad (16)$$

La relación[4]

$$v_{n+m} = v_{n-1}v_m + v_n v_{m+1},$$

que puede ser demostrada por inducción, se combina con (16) para dar la siguiente relación aproximada:

$$\frac{v_{2n}}{\sqrt{5}} \approx v_n^2. \quad (17)$$

Las ecuaciones (13) a la (17) dan excelentes aproximaciones si n es mayor que 5.

Sección 2.

DESARROLLOS EN SERIE CON COEFICIENTES DE FIBONACCI.

Los polinomios de Chebicheff son casos especiales de los polinomios ultrasféricos[1] $C_n^\nu(x)$, con $\nu = 0$ y 1. Las relaciones exactas son[3]:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} n C_n^0(x) = (g_n)^{-1} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x),$$

y

$$U_n(x) = C_n^1(x) = (2g_{n+1})^{-1} P_n^{(1/2, 1/2)}(x),$$

con

$$g_n = \frac{(1/2)_n}{n!} = 2^{-2n} \binom{2n}{n}.$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ son polinomios de Jacobi[1].

Consideremos el desarrollo[1]:

$$\exp(xt) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) I_{\nu+n}(t) C_n^\nu(x), \quad (18)$$

donde las $I_k(t)$ son funciones de Bessel modificadas de primera especie. En (18) reemplacemos a x por $-x$, recordando que $C_n^\nu(-x) = (-1)^n C_n^\nu(x)$, y restemos la serie resultante de la ecuación (18) para obtener

$$\sinh xt = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+2n+1) I_{\nu+2n+1}(t) C_{2n+1}^\nu(x).$$

Hagamos ahora $\nu = 1$. Reemplacemos a t por $-it$ y recordemos que $I_n(-it) = i^{-n} J_n(t)$. Hagamos $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, reemplacemos a n por $n-1$, y finalmente hagamos $\sqrt{5t}/2 = \xi$, para obtener el resultado.

$$\xi \operatorname{sen} \xi = 5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_{2n} J_{2n}(2\xi/\sqrt{5}). \quad (19)$$

Separando la parte *impar* de (18) en vez de la par, da el resultado

$$\xi \cos \xi = 5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left[\frac{v_{2n} + v_{2n+2}}{\sqrt{5}} \right] J_{2n+1}(2\xi/\sqrt{5}). \quad (20)$$

En razón de la ecuación (16), la expresión en corchetes arriba es aproximadamente v_{2n+1} .

Las series (19) y (20) convergen rápidamente, y son, a conocimiento del autor, resultados completamente nuevos.

Debe observarse que la técnica es completamente general. Dada una función $f(x,t)$ que admita un desarrollo en serie de la forma

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) C_n^\nu(x), \quad (21)$$

es simplemente necesario dar valores apropiados a ν , y hacer x igual a $\sqrt{5}/2$, si $\sqrt{5}/2$ está dentro de la región de convergencia en x , para llegar a una expresión como (19) o (20). Las referencias [1] y [5] contienen amplia información sobre las condiciones que garantizan la validez de los desarrollos (21).

Es importante tener presente que los números de Fibonacci crecen sumamente rápido, por ejemplo, $v_{10} = 55$, $v_{20} = 6765$, $v_{30} = 832.040$, $v_{40} = 102.334.155$. Por lo tanto, cuando un desarrollo en serie con coeficientes de Fibonacci es convergente, los $a_n(t)$ deben decrecer muy rápidamente a medida que n aumenta. Esta circunstancia hace esas series muy amenas para el cálculo numérico. Ilustremos este hecho en las secciones venideras.

Sección 3.

UNA SERIE PARA EL ARCO TANGENTE.

Consideremos una vez más la expresión.

$$(1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n. \quad (7)$$

Multipliquemos ambos miembros por $(-2x+2t)$, lo cual hace el primer miembro un diferencial exacto, e integremos con respecto a t ,

$$\text{Log}(1-2xt+t^2) = -2x \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \frac{t^{n+1}}{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \frac{t^{n+2}}{n+2}, \quad (22)$$

donde la función logarítmica designa aquella rama que tiende a cero cuando t tiende a cero.

Reemplacemos a t por it , y luego a t por $-it$, y restemos las dos expresiones. Obtenemos así,

$$\text{Log} \left(\frac{1-2ixt-t^2}{1+2ixt-t^2} \right) = -4ix \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n}(x) (-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} - 4i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{2n-1}(x) (-1)^{n+1} t^{2n+1}}{2n+1}$$

Tenemos también,

$$\text{Log} \left(\frac{1-2ixt-t^2}{1+2ixt-t^2} \right) = \text{Log} \left(\frac{i + \frac{2xt}{1-t^2}}{i - \frac{2xt}{1-t^2}} \right) = \frac{2}{i} \tan^{-1} \frac{2xt}{1-t^2}$$

Esto nos da,

$$\tan^{-1} \frac{2xt}{1-t^2} = 2xt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[x U_{2n}(x) - U_{2n-1}(x)] (-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \quad (23)$$

Hagamos ahora $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, utilicemos las ecuaciones (8) y (10) y la definición de los números de Fibonacci: $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$, y finalmente hagamos $\sqrt{5}t = \xi$, para obtener,

$$\tan^{-1} \frac{5\xi}{5-\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u_{2n+1} \xi^{2n+1}}{5^n (2n+1)} \quad (24)$$

que nos da una sencilla y curiosa serie para el arco tangente con números de Fibonacci impares como coeficientes.

Sección 4.

COMPARACION CON LA SERIE DE EULER PARA EL ARCO TANGENTE.

Existen dos series célebres para el cálculo del arco tangente. La primera de ellas es la serie de Gregory descubierta por éste en 1671, y la cual tiene la expresión:

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Esta serie converge muy lentamente, excepto para valores muy pequeños de su argumento. Para $x = 1$, por ejemplo, da la famosa serie de Leibnitz para $\pi/4$, con la cual son necesarios dos mil términos para obtener tres cifras decimales de π . La serie de Gregory es un caso especial de la serie (23) correspondiente al valor $x = 1$, recordando que $U_n(1) = n+1$, y utilizando la identidad trigonométrica para la tangente del ángulo medio: $\tan^{-1}(2t/1-t^2) = \tan^{-1} t$.

La serie de Euler, descubierta por éste en 1755, tiene la forma

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} \quad (25)$$

Esta serie converge rápidamente para toda x , y especialmente para valores pequeños de su argumento.

Sea $x = a \ll 1$. Utilizando la fórmula de Stirling para el factorial

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \text{ grande,}$$

obtenemos para el término general a_n de la serie de Euler, la aproximación

$$a_n \sim \frac{e\sqrt{\pi}}{2} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

Para comparar este resultado con el correspondiente a la serie (24) hacemos $5\xi/(5-\xi^2) = \alpha \vee 0$, y seleccionamos la menor de las raíces de esta ecuación cuadrática:

$$\xi_2 = \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 + (4\alpha^2/5)}} \quad (27)$$

Si α es pequeño, tenemos $\xi_2 \sim \alpha$. Para el término general, aparte del signo, b_n de la serie (24) tenemos, recordando las aproximaciones (13) y (14), el estimado.

$$b_n \cong \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{1 + 5^{-1/2}}{2} \right)^{2n+1} \quad (28)$$

Comparando (26) con (28), y observando que la expresión en paréntesis arriba es menor que uno (0,723606798), vemos que, para valores pequeños del argumento, la serie (24) converge sustancialmente más rápido que la serie (25).

Lo del argumento pequeño es sólo una restricción aparente, necesaria para simplificar la demostración arriba. Si α es grande basta utilizar la identidad:

$$\tan^{-1} \alpha = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\alpha}, \quad (\alpha > 1).$$

La serie (24) tiene la ventaja adicional de ser una serie alternante, mientras que la serie (25) no lo es. Es, como es bien sabido, una propiedad general de estas series que el resto después de n términos tiene un valor que está entre cero y el primer término despreciado. Es muy sencillo, en consecuencia, determinar el número de términos de (24) necesarios para obtener un determinado grado de precisión.

Sección 5.

ALGUNAS SERIES PARA π .

En la ecuación (24) hacemos $5\xi/(5-\xi^2) = 1$, resolvemos esta ecuación cuadrática con la ayuda de (27), y sustituimos en (24) para obtener,

$$\pi = \sqrt{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n v_{2n+1} 2^{2n+3}}{(2n+1)(3+\sqrt{5})^{2n+1}} \quad (29)$$

De la ecuación (28) vemos que rápida convergencia de la serie (24) depende de nuestra habilidad para escoger el argumento del arco tangente, o, lo que es lo mismo, el ángulo, suficientemente pequeño.

Por ejemplo,

$$\frac{\pi}{12} = \tan^{-1}(2-\sqrt{3}).$$

Para este argumento, la menor de las raíces es aproximadamente 0,264208298, que es más de tres veces más pequeña que la utilizada en la ecuación (29). Con este valor de ξ la serie (24) converge muy rápidamente. Un cálculo hecho en una microcomputadora Radio Shack TRS-80 Modelo I dio quince cifras decimales de π con sólo diez términos. La serie de Euler para el mismo argumento requiere trece términos para dar quince decimales de π . Por contraste, la serie (29) requiere treinta y dos términos para dar quince decimales π , mientras que la serie de Euler para el mismo argumento requiere cincuenta términos.

Es posible utilizar una estratagema originada por Euler[6], que consiste en utilizar la identidad,

$$\pi = 20 \tan^{-1}(1/7) + 8 \tan^{-1}(3/79). \quad (30)$$

Haciendo α igual a 1/7 y a 3/79 obtenemos valores para las raíces que son aproximadamente,

$$\xi = 0,142278764 \text{ y } \xi' = 0,037963737.$$

Utilizando esos valores en (30) con la serie (24) obtenemos una serie para π que converge extraordinariamente rápido. Un cálculo por computadora con esta combinación de arcos tangentes dio para la serie de Euler y para nuestra serie los valores:

Número de términos utilizados	Serie de Euler	Serie nueva
1	3,103360000000000	3,149285186563369
2	3,140984558933333	3,141546332790760
3	3,141582227758558	3,141593001447959
4	3,141592468172651	3,141592650726275
5	3,141592650217625	3,141592653614616
6	3,141592653527525	3,141592653589571
7	3,141592653588631	3,141592653587796
8	3,141592653589771	3,141592653589793
9	3,141592653589793	

Vemos que la serie nueva consistentemente da mejores aproximaciones que la serie de Euler.

Otras combinaciones de arcos tangentes, tales como,

$$\pi = 24 \tan^{-1}(1/8) + 8 \tan^{-1}(1/57) + 4 \tan^{-1}(1/239),$$

debido a Störmer, dan resultados similares a los de arriba. A medida que se calculan más decimales, sin embargo, la diferencia entre las series se hace notar, y la balanza se inclina en favor de nuestra serie. Para el mismo valor del argumento el décimo término de la serie de Euler es $5,09 \times 10^3$ veces más grande que el décimo término de la nuestra. El vigésimo término de la serie de Euler es $4,52 \times 10^6$ veces más grande que el término correspondiente de nuestra serie. El trigésimo término es $3,64 \times 10^9$ veces más grande. El centésimo término es $3,39 \times 10^{29}$ veces más grande, y el tricentésimo término es $2,30 \times 10^{86}$ veces más grande.

Es un hecho histórico interesante que Fibonacci intentó en su época calcular el valor de π por el método de los polígonos inscritos y circunscritos de Arquímedes. Utilizando un polígono de 96 lados, obtuvo

para π la aproximación $864 \div 275$, lo cual le dio el valor aproximado de 3,141818, con tres cifras decimales correctas. Es sensato pensar que él nunca sospechó que la peculiar sucesión que había descubierto en el crecimiento de la población de conejos daría, casi ocho siglos después, un sencillo y poderoso algoritmo para el cálculo de π con cualquier precisión deseada.

REFERENCIAS

- 1.—E. D. Rainville, *Special Functions*. The MacMillan Company. New York, 1960. Páginas 301 y 302. Ver también el ejercicio 3 en la página 284.
- 2.—H. E. Huntley, *The Divine Proportion, A Study in Mathematical Beauty*. Dover Publications, Inc., New York, 1970. Capítulo 11.
- 3.—Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, y Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Bateman Manuscript Project*, Volumen 2. McGraw Hill, 1953. Páginas 183-187.
- 4.—N. N. Vorobiov, *Números de Fibonacci*. Editorial MIR, Moscú, 1974.
- 5.—Boas, R. R., Jr., y Buck, R. C., *Polynomial Expansions of Analytic Functions*. Berlín: Springer, 1958.
- 6.—Beckman, Petr, *A History of π* . St. Martin's Press, New York, 1971, página 154.