FLUJO HELICOIDAL LIQUIDO DE CRISTALES COLESTERICOS ENTRE DOS CILINDROS CALIENTES COAXIALES QUE TIENEN VELOCIDADES AXIAL Y ROTACIONAL

Ajit Kumar Sharma (*)

RESUMEN

Este Trabajo trata de flujo helicoidal de líquidos de cristales colestéricos incomprensibles con un director de magnitud unidad cuando entre dos cilindros coaxiales, mantenidos a diferentes temperaturas, en tanto que los cilindros giran con diferentes velocidades axiales y se mueven a lo largo de un eje común con velocidades axiales diferentes. Con un corte bajo y un gradiente de tempertura pequeña en el sentido de la dirección radial, se han obtenido las componentes de volocidad, la distribución de temperatura y la orientación de las moléculas entre los dos cilindros. Se encontró que la temperatura influencia el director pero las componentes de velocidad no se afectan.

1. *INTRODUCCION*

Empleando la teoría los cristales líquidos colestéricos con director de magnitud unidad propuesta por Leslie (1) y sus constituyentes, esto es la parte de no equilibrio de las ecuaciones básicas (2) y la forma de Helmholtz de energía libre (3), Sharma (4) discutió el flujo helicoidal de un cristal líquido colestérico entre cilindros circulares coaxiales que tienen velocidades rotarorial y axial en su eje común. Se ha examinado también el efecto del campo magnético (5) así como los efectos de gradientes de temperatura pequeña (6) en el flujo. El objeto del presene trabajo es discutir los efectos de temperatura que variando radialmente en el flujo helicoidal, considerandolo entre dos cilindros coaxiales calentados que tienen tantas velocidades radiales como axiales en un eje común. Se obtendrán con un cortante bajo, y un gradiente de temperatura en dirección radial, las componentes no nulas de las velocidades la disribución de temperatura la orientación de las moléculas entre los dos cilindros despreciando los términos inicales en las ecuaciones diferenciales que gobiernan la orientación de las moléculas y serán examinados los efectos de temperatura en el flujo helicoidal.

(*) Department of Mathematics & Statistics, College of Basic Sciences & Humanities, G.B. Pant Uniersity of Agriculture & Technology, *PANTNAGAR-263145*, District Nainital (U.P.), *INDIA*.

Para las ecuaciones básicas nos referimos a Sharma (6)

2. *PRESENTACION DEL PROBLEMA*

Consideramos el flujo helicoidal del líquido del cristal colestérico incomprensible de unidad de magnitud d entre dos cilindros infinitos circulares coaxiales. Los cilindros tienen velocidades angular axial diferentes según su eje y se mantienen a diferentes temperaturas.

Escogemos ahora un sistema de coordenadas polar (r,ϑ,z), tal y que el eje z coincida con el eje común en los cilindros. Los cilidros tienen radial r_1, r_2 $(r_1 \quad r_2)$, ω_1, ω_2, y sus velocidades angulares respectivamente y V_1, V_2 son sus velocidades axiales respectivas. Tambien el director d tiene la misma orientación en los dos cilindros.

Suponiendo qaue todas las incognitas son funciones de r sólo, determinaremos las coluciones de las ecuaciones diferenciales [(2.1(a (2.4), [6 [en la forma

$$v_r = o, \ v_o = r\,\omega(r), \ v_z = u(r),$$
$$d_r = \text{sen}\varphi(r), \ d_o = \cos\varphi(r)\text{sen}\psi(r), \ d_z = \cos\varphi(r)\cos\psi(r),$$
$$T = f(r). \tag{2.1}$$

Las condiciones de límites para las componentes de la velocidad, la orientación de las moléculas y las respectivas temperaturas en los cilindros luego son

$$\omega = \omega_1, \quad u = U_1, \qquad \text{en } r = r_1$$
$$\omega = \omega_2, \quad u = U_2, \qquad \text{en } r = r_2 \tag{2.2}$$

$$\varphi = \ _o, \quad \psi = \psi_o, \qquad \text{en } r = r_1$$
$$\varphi = \ _o, \quad \psi = \psi_o, \qquad \text{en } r = r_2 \tag{2.3}$$

$$f = T_1, \qquad \text{en } r = r_1$$
$$f = T_2, \qquad \text{en } r = r_2 \tag{2.4}$$

donde ψ_0 es una constante.

3. *ECUACIONES DIFERENCIALES QUE GOBIERNAN EL FLUJO HELICOIDAL EN EL GRADIENTE RARIAL DE TEMPERATURA.*

Siguiendo el esquema adoptado por Sharma (6), las ecuaciones que gobiernan el flujo helicoidal en el gradiente de temperatura radial se obtienen así

$$\xi = \frac{h}{r}\left\{ G_,(\varphi) + G_2(\varphi)\text{sen}^2\psi \right\} + \frac{l}{r^2} \qquad G_2(\varphi)\text{sen}\psi\cos\psi + \frac{m}{r} G_{13}(\varphi)\text{sen}\psi, \tag{3.1}$$

$$\eta = -\frac{l}{r^2}\left\{ G_4(\varphi) - G_2(\varphi)\text{sen}^2\psi \right\}' - \frac{k}{r} - G_2(\varphi)\text{sen}\psi\cos\psi - \frac{m}{r} G_3(\varphi)\cos\psi, \tag{3.2}$$

$$\zeta = \frac{l}{r} \qquad (k\,\text{sen}\psi - \frac{l}{r}\cos\psi)\ G_5(\varphi) + \qquad G_6(\varphi), \tag{3.3}$$

$$2F_,(\varphi)\left\{ \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{l}{r}\frac{d\varphi}{dr} \right\} + \frac{d}{d\varphi} F_1(\varphi)\left\{ \left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{l}{r^2} \right\}$$

$$- \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \left\{ \frac{d\psi}{dr} + \text{sen}\psi\cos\psi \right\}^2$$

$$+ \text{sen}2\varphi \left[\left(2\alpha_2\tau - \frac{\alpha_3}{r}\ \text{sen}2\psi \right)\frac{d\psi}{dr} \right.$$

$$\left. + \qquad \frac{l}{r}\left\{ \alpha_2\tau\text{sen}2\psi - \frac{\alpha_3}{r}\ (1+\text{sen}^2\psi)\cos^2\psi \right\} \right]$$

$$+ 2(\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2\varphi)(\xi \cos\psi + \eta \sin\psi)$$

$$+ P_1 \omega^2 s\epsilon\nu 2\varphi \cos^2\psi = o, \tag{3.4}$$

$$F_2(\varphi) \left\{ \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{l}{r} \frac{d\psi}{dr} \right\} + \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr}$$

$$+ \frac{l}{r} \operatorname{sen}\psi\cos\psi \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{l}{4r} \vartheta o\tau\varphi\cos 2\psi \right) \left\{ \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) + 2\alpha_3 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \right\}$$

$$+ \cos\varphi \left\{ \frac{l}{r} \cos\varphi\operatorname{sen}\psi \left(2\alpha_2\tau\operatorname{sen}\psi - \frac{\alpha_3}{r} \cos\psi \right) - 2\alpha_2\tau\operatorname{sen}\varphi \frac{d\varphi}{dr} \right\}$$

$$+ (\lambda_1 - \lambda_2)(\zeta\operatorname{sen}\psi - \eta\cos\psi)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \lambda_3 \zeta\cos^2\varphi$$

$$+ P1\, \omega_2 \cos^2\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\psi = o \tag{35}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{du}{dr}, \lambda = \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr}, \zeta = \frac{df}{dr},$$

$$G_1(\varphi) = \frac{1}{\left\{ H_1(\varphi) + H_2(\varphi) \right\}}$$

$$G_2(\varphi) = \frac{\left\{ K_1(\varphi) H_2(\varphi) + K_2(\varphi) H_3(\varphi) \right\}}{\left\{ I_1(\varphi) + H_2\varphi \right\} \left\{ K_1(\varphi) H_1\varphi) - K_2(\varphi) H_3\varphi) \right\}},$$

$$G_3(\varphi) = \frac{H_3(\varphi)}{\left\{ K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi) \right\}}.$$

$$G_4(\varphi) = \frac{K_1(\varphi)}{\left\{ K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi) \right\}},$$

$$G_5(\varphi) = \frac{K_1(\varphi)}{\left\{ K_1(\varphi)\,H_1(\varphi) - K_2(\varphi)\,H_3(\varphi) \right\}},$$

$$G_6(\varphi) = \frac{H_1(\varphi)}{\left\{ K_1(\varphi)\,H_1(\varphi) - K_2(\varphi)\,H_3(\varphi) \right\}},$$

$$H_1(\varphi) = (\mu_4 + (\mu_5 - \mu_2)\mathrm{sen}^2\varphi,$$

$$H_2(\varphi) = \cos^2\varphi\,(2\mu_1\,\mathrm{sen}^2\varphi + \mu_3 + \mu_6),$$

$$H_3(\varphi) = \mu_7\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi,$$

$$K_1(\varphi) = k_1 + k_2\mathrm{sen}^2\varphi,$$

$$K_2(\varphi) = (k_3 - k_4)\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi,$$

$$F_1(\varphi) = \alpha_1\cos^2\varphi + \alpha_3\mathrm{sen}^2\varphi,$$

$$F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\,(\alpha_2\cos^2\varphi + \alpha_3 s\epsilon\nu^2\varphi) \qquad (3.6)$$

4. *SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON CORTANTE BAJO Y UN GRADIENTE DE TEMPERATURA PEQUEÑO.*

En esta sección examinaremos las soluciones de las ecuaciones diferenciales (3.1) y (3.5) con cortantes bajo y un gradiente de temperatura pequeño en dirección radial, eliminando los términos de inercia en las ecuaciones (3.4) y 3.5).

Las soluciones son de la forma

$$u(r) = U_1 + ku_1(r) + l\,u_2(r) + m\,u_3(r) + O(k^2,\ldots, kl,\ldots), \qquad (4.1)$$

$$\omega(r) = \omega_1 + k\omega_1(r) + l\,\omega_2(r) + m\omega_3(r) + O(k^2,\ldots, kl,\ldots), \qquad (4.2)$$

$$f(r) = T_1 + k\,f_1(r) + lf_2(r) + mf_3(r) + O(k^2,\ldots, kl,\ldots), \qquad (4.3)$$

$$\varphi(r) = k\,\varphi_1(r) + l\varphi_2(r) + m\varphi_3(r) + O(k^2,\ldots, kl,\ldots), \qquad (4.4)$$

$$\psi(l) = \psi_o + k\psi_1(r) + l\psi_2(r) + m\,\psi_3(r) + O(k^2,\ldots, kl,\ldots), \qquad (4.5)$$

donde $U_i, \omega_i, f_i, \varphi_i, \psi_i (i = 1,2,3)$, k, l, m deben calcularse desde (3.1) a 3.5) usando las condiciones de borde (2.2) a (2.4).

Luego puede demostrarse que

$$u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{A_1A_3 - A^2_2} \right) \left[A_1A_3 \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)} - A^2_2 \frac{r_2}{r} \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) \right]$$

$$+ (\omega_2 - \omega_1) \left(\frac{A_1A_2}{A_1A_3 - A^2_2} \right) \left[\frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)} - \frac{r_2}{r} \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) \right]$$

$$\omega = \omega_1 + (U_2 - U_1) \left(\frac{A_2A_3}{A_1A_3 - A^2_2} \right) \left(\frac{r_1r_2}{r_2} \right) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) \left(\frac{r_2 8 r}{r_2 + r_1} \right) \quad (4.6)$$

$$+ \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{A_1A_3 - A^2_2} \right) \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) A_1A_3 \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r + r_1}{r_2 + r_1} \right) - A^2_2 \Bigg] , \quad (4.7)$$

$$T = f(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\log(r/r_1}{\log(r_2/r_1)} , \quad (4.8)$$

$$\varphi = \left(\frac{A_4}{A_1A_3 - A^2_2} \right) \Bigg[(U_2 - U_1 \Bigg\{ A_3 \cos\psi_0 \log \left(\frac{\frac{r_2 - r}{r_1} \quad \frac{r - r_1}{r_2}}{\frac{r_2 - r_1}{r}} \right)$$

$$+ \frac{A_2}{2} \operatorname{sen}\psi_0 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \log \left(\frac{r_1}{r} \right) \log \left(\frac{r}{r_2} \right) \Bigg\}$$

$$+ (\omega_2 - \omega_1) \Bigg\{ A_2 \cos\psi_0 \quad \log \left(\frac{\frac{r_2 - r}{r_1} \quad \frac{r - r_1}{r_2}}{\frac{r_2 - r_1}{r}} \right)$$

$$+ \quad \frac{A_1}{2} \quad \operatorname{sen}\psi_o \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \log\left(\frac{r}{r_2}\right) \Big\} \Big] \tag{4.9}$$

$$\psi = \psi_o + A_5 \left[\quad 4\alpha_2\, \tau \operatorname{sen}\psi_o \log \left(\frac{r_1^{\frac{r_2 - r}{}} \quad r_2^{\frac{r - r_1}{}}}{\frac{r_2 - r_1}{r}} \right) \right.$$

$$\left. - \; \alpha_3 \; \cos\psi_o \; \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \; \log\left(\frac{r}{r_2}\right) \right] \tag{4.10}$$

$$- A_6 \log \left(\frac{r_1^{\,r_2 - r} \quad r_2^{\,r - r_1}}{\frac{r_2 - r_1}{r}} \right)$$

donde,

$$A_1 = \left[\frac{2 \left\{ \mu_4 + (\mu_3 + \mu_6) \operatorname{sen}^2\psi_o \right\}}{\mu_4 (\mu_3 + \mu_4 + {}_6)} \right] \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

$$A_2 = \left[\frac{(\mu_3 + \mu_6) \operatorname{sen}^2\psi_o}{\mu_4(\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$A_3 = \left[\frac{(\mu_4 + (\mu_3 + \mu_6) \cos^2\psi_o}{\mu_4(\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \left(\frac{r^2{}_2 - r^2{}_1}{r^2{}_1 r_2} \right)$$

$$A_4 = \left[\frac{(\lambda_1 + \lambda_2}{\alpha_1(\mu_3 + \mu_4 + \mu_6) \log(r_1/r_2)} \right]$$

$$A_5 = \frac{\text{sen}\psi_o}{2\alpha_2 \log(r_1/r_2)}$$

$$A_6 = \frac{\lambda_3(T_2 - T_1)}{\alpha_2 \left\{ \log(r_2/r_1) \right\}^2} \qquad (4.11)$$

5. *CASO PARTICULAR*

En ausencia de temperatura radial nuestro problema se reduce a la de Sharma (4).

6. *CONCLUSION*

Con corte bajo y gradiente de temperatura en dirección radial obtenemos las expresiones (4.6), (4.7) para la distribución de velocidades (4.8) para la distribución de temperatura (4.9), (4.10) para la orientación de las moléculas entre los dos cilindros. De las expresiones anteriormente mensionadas se observa que la temperatura tiene su efecto en ψ, indicado por el último término A_6 en (4.10) y la forma funcional del radio vector en sus logaritmos, en tanto que u, ω,φ permanecen sin ser afectadas. También es evidente que la ecuación (4.8) que varian el perfil de temperatura logaritmicamente en la dirección radial.

RECONOCIMIENTO

El autor está muy agradecido del Colegio de Ciencias Básicas y de Humanidades por las facilidades que han dado para hacer este trabajo.

SUMMARY

The paper deals with the helical flow of an incompressible cholesteric liquid crystal with director of unit magnitude between two coaxial hot circular cylinders maintained at different temperatures, while the cylinders are rotating with different angular velocities and are moving along their common axis with different axial velocities. At low shear rates with a small temperature gradient in the radial direction,

the non-zero components of velocity, the temperature distribution and the orientation of molecules between the two cylinders have been obtined. It is found that the temperature influences the diretor but the volocity components remain unaffected.

REFERENCIAS

1. *LESLIE, F.M.* Some thermal effects in cholesteric liquid crystals [Proc. Roy. Soc. *A307,* 359-372 (1968)].

2. *LESLIE, F.M.* Continuum theory of liquid crystals [Disc. Faraday Soc. *25,* 19-28 (1958)].

3. *FRANK, F.C.* On the theory of liquid crystals [Disc. Faraday Soc. *25,* 19-28 (1958)].

4. *SHARMA, A.K.* Helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities [Bulletin Mathématique *21 (69).* 93-102 (1977)].

5. *SHARMA, A.K.* Effect of static magnetic field on helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities [Journal of Australian Mathmatical Society, Series B, Appl. Maths. XIX (3), 371-380 (1976)].

6. *SHARMA, A.K.* Effects of temperature gradients on the helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities [Boletín de la Academia de Ciencias Físicas Matemáticas y Naturales de Caracas Año XL-Tomo XL-nos 119Y120, 121-156 (1981)].