DIVERGENCIA DE MARTINGALAS L_1—ACOTADAS

por
LUIS BAEZ DUARTE

Trabajo de Incorporación
a la Academia de Ciencias Físicas,
Matemáticas y Naturales

Caracas, febrero de 1982

1. INTRODUCCION.

El conocido teorema de convergencia de martingalas de Doob [3] establece que toda martingala L_1-acotada converge con probabilidad 1. En un trabajo anterior [2] el autor dió una prueba nueva de este teorema haciéndolo provenir del teorema de Andersen-Jessen [1] para martingalas μ-dominadas. Dicha prueba tiene además el interés de hacer depender la convergencia exclusivamente de la conocida desigualdad maximal para martingalas, con lo que se logra una unificación metodológica con otras pruebas de convergencia puntual. En este trabajo profundizamos el conocimiento del comportamiento puntual de las martingalas mostrando que las martingalas μ-dominadas divergen a $\pm\infty$ en el soporte de la parte singular asociada a la medida dominante. Esto explica la aparente paradoja del título escogido. Es de notar que la herramienta esencial sigue siendo la desigualdad maximal.

Conjeturamos que se puede trasladar este resultado a las funciones armónicas en el disco unidad con lo que se lograría extender por los mismos métodos el teorema de Fatou y demostrar la existencia de ciertas singularidades en el círculo unidad para funciones analíticas de clase H_1 de Hardy.

2. PRELIMINARES Y NOTACION.

Denotaremos por $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio probabilístico cualquiera y por $\{\mathcal{F}_n\}$ una sucesión de sigma-álgebras tales que

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F} .$$

En todo lo que sigue no se pierde generalidad si se supone que $\mathcal{F}$ es la menor sigma-álgebra que contiene a todas las $\mathcal{F}_n$. Esto es, que $\mathcal{F}$ es la sigma-álgebra generada por el álgebra

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \tag{2.1}$$

Si λ es una función cualquiera con dominio en $\mathcal{F}$ escribiremos λ_n para denotar la restricción de λ a $\mathcal{F}_n$, esto es, en símbolos

$$\lambda_n = (\lambda | \mathcal{F}_n)$$

Como de costumbre I_A será la función característica del subconjunto A de Ω .

Si λ_1 y λ_2 son dos medidas signadas finitas sobre $\mathcal{F}$ entonces la descomposición de Lebesgue y el teorema de Radon-Nikodym implican que existe una función f λ_2-integrable y una medida λ_3 singular respecto a λ_2 tales que

$$\lambda_1(E) = \int_E f \, d\lambda_2 + \lambda_3(E) \tag{2.2}$$

para todo E en F. Abreviaremos esto con la notación usual

$$d\lambda_1 = f d\lambda_2 + d\lambda_3 \ .$$

Para toda medida λ en F, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ es la descomposición de Hahn-Jordan, $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$ es su variación total y $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$. Para dos medidas λ_1, λ_2 en F decimos que λ_1 es λ_2-continua si $|\lambda_2|(E) = 0$ implica $|\lambda_1|(E) = 0$, y escribiremos

$$\lambda_1 << \lambda_2 .$$

Diremos que λ_1 y λ_2 son singulares entre si, en símbolos

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \ ,$$

cuando existe una partición disjunta de Ω, $\Omega = A + B$ tal que $|\lambda_1|(B) = |\lambda_2|(A) = 0$.

Aun cuando λ_1 no sea λ_2-continua definiremos su derivada de Radon-Nikodym como la densidad f de su parte λ_2-continua dada en (2.2), esto es

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = f.$$

Dada una sigma-álgebra $G \subseteq F$ y una función P-integrable f definimos su esperanza condicional respecto a G como cualquier función g tal que cumpla

(i) g es $\mathcal{G}$-medible

(ii) $\int_E g\,dP = \int_E f\,dP, \qquad E \in \mathcal{G}.$

Es esencial en lo que sigue que g sea estrictamente $\mathcal{G}$-medible y no solamente P a.e. igual a una función tal. Designaremos la esperanza condicional con el símbolo usual

$$g = E(f|\mathcal{G}).$$

Asumiremos conocidas la existencia y todas las propiedades fundamentales del operador lineal $f \to E(f|\mathcal{G})$.

3. MARTINGALAS Y MARTINGALAS μ-DOMINADAS

Una sucesión $\{x_n\}$ de funciones integrables se llama martingala adaptada a $\{\mathcal{F}_n\}$, o simplemente martingala, si

(i) x_n es $\mathcal{F}_n$-medible, $(n \geq 1)$,

(ii) $x_m = E(x_n|\mathcal{F}_m), \qquad (n \geq m \geq 1)$.

Naturalmente la condición (i) es supérflua, pero se estipula por hacer énfasis. Si la igualdad (ii) se sustituye por

(iii) $x_m \geq E(x_n|\mathcal{F}_m), \qquad (n \geq m \geq 1)$,

entonces se dice que $\{x_n\}$ es una supermartingala (adaptada a $\{\mathcal{F}_n\}$). Nótese que basta tener

$$x_n \geq E(x_{n+1}|F_n), \qquad (n \geq 1),$$

para que se verifique (iii) en toda su generalidad.

Se dice que la martingala $\{x_n\}$ es L1-acotada si se tiene

$$\sup_{n \geq 1} \|x_n\|_1 < \infty .$$

Una clase importante de martingalas L_1-acotadas se obtiene tomando una función integrable x_∞ cualquiera y poniendo

$$x_n = E(x_\infty|F_n), \quad (n \geq 1) \qquad (3.1)$$

De acuerdo con [2] llamaremos hereditarias a estas martingalas, que, como es sabido coinciden con la clase de martingalas uniformemente integrables. Existen por otra parte martingalas L_1-acotadas no hereditarias tales como la dada por

$$x_n = 2^n I_{[0,2^{-n}]} \quad , \qquad (n \geq 1). \qquad (3.2)$$

donde $\Omega = [0,1]$ y F_n es la sigma-álgebra generada por la partición de Ω dada por

$$0 < 2^{-n} < 2^{-n+1} < \ldots < 2^{-1} < 1.$$

Es natural llamar a este simple pero importante ejemplo "delta de Dirac". La delta de Dirac puede generalizarse fácilmente de la manera siguiente. Se toma una medida signada finita μ so bre $\mathcal{F}$ y una sucesión de particiones finitas refinadas $\{\pi_n\}$ sin átomos de probabilidad cero. Se define cada $\mathcal{F}_n$ como la sigma-álgebra finita generada por π_n y se pone

$$x_n = \sum_{A \in \pi_n} \frac{\mu(A)}{P(A)} I_A . \tag{3.3}$$

Estas martingalas estudiadas primero por Andersen-Jessen surgen naturalmente en la teoría de la diferenciación abstracta. Es fácil ver que son L_1-acotadas porque

$$\|x_n\|_1 = \sum_{A \in \pi_n} |\mu(A)| \leq \|\mu\| .$$

Es intuitivo pensar que como ocurre con la delta de Dirac (3.2) las martingalas de tipo (3.3) divergen a $+\infty$ $(-\infty)$ en el soporte de la parte P-singular de μ. El resultado fundamental de este trabajo expuesto en la sección 8 en efecto establece y generaliza esta conjetura.

Tanto las martingalas hereditarias (3.1) como las de tipo (3.3) son ejemplos particulares de un tipo más general que llamaremos, siguiendo la nomenclatura de [2], <u>martingalas μ-dominadas</u>, o dominadas por la medida μ. Decimos pues que la martingala $\{x_n\}$ está dominada por la medida signada finita μ cuando se cumple

$$\text{(i)} \quad \mu_n \ll P_n \qquad (n \geq 1) \tag{3.4}$$

$$\text{(ii)} \quad \mu_n(E) = \int_E x_n \, dP \qquad (E \in \mathcal{F}_n).$$

La última condición dice que $d\mu_n = x_n \, dP_n$, o que

$$x_n = \frac{d\mu_n}{dP_n} , \tag{3.5}$$

y es necesario enfatizar que para una medida signada finita μ en $\mathcal{F}$ la fórmula (3.5) no siempre define una martingala, a menos que también se cumpla $\mu_n << P_n$ para cada $n \geq 1$. En conexión con esto y para uso posterior estableceremos las siguientes proposiciones.

Proposición 3.1 *Sea μ una medida no negativa finita en $\mathcal{F}$. Entonces $\frac{d\mu_n}{dP_n}$ es una supermartingala no-negativa.*

Prueba: Sea $x_n = \dfrac{d\mu_n}{dP_n}$ y

$$\mu_{n+1} = \mu^a_{n+1} + \mu^s_{n+1}$$

la descomposición de Lebesgue de μ_{n+1} respecto a P_{n+1}, esto es, $\mu^a_{n+1} << P_{n+1}$ y $\mu^s_{n+1} \perp P_{n+1}$.

Restringiendo queda

$$\mu_n = (\mu_{n+1} | \mathcal{F}_n) = (\mu^a_{n+1} | \mathcal{F}_n) + (\mu^s_{n+1} | \mathcal{F}_n).$$

Ahora bien, es claro que $(\mu^a_{n+1} | \mathcal{F}_n) << P_n$, pero que $(\mu^s_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ puede tener alguna parte P_n-continua no trivial. Entonces la unicidad de la descomposición de Lebesgue de μ_n respecto a P_n nos da

$$\mu_n^a \geq (\mu_{n+1}^a | F_n) \quad .$$

Por lo tanto para todo $E \in F_n$ queda

$$\mu_n^a(E) = \int_E x_n \, dP \geq \mu_{n+1}^a(E) = \int_E x_{n+1} \, dP$$

$$= \int_E E(x_{n+1} | F_n) dP.$$

De lo que se sigue

$$x_n \geq E(x_{n+1} | F_n) \; .$$

Lo que demuestra que $\{x_n\}$ es una supermartingala. q.e.d.

Proposición 3.2 Sea μ una medida signada finita en F. Entonces $\frac{d\mu_n}{dP_n}$ es la diferencia de dos supermartingalas no-negativas.

Prueba: Simplemente usar la descomposición de Hahn-Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y aplicar la proposición anterior, q.e.d.

Tanto las martingalas hereditarias (3.1) como las que surgen en la teoría de la diferenciación (3.3) son martingalas μ-dominadas. Es fácil ver que la medida dominante en el caso hereditario viene dada por $d\mu = x_\infty \, dP$, y en el caso (3.3) la medida dominante es la misma μ que la define.

Es fácil ver que toda martingala μ-dominada es L_1-acotada. En efecto la condición (3.4) ii implica que $\sup_n \|x_n\|_1 \leq \|\mu\|$. Sin embargo la recíproca de esta proposición no es cierta. El ejemplo mismo de la delta de Dirac (3.2) nos provee de un contraejemplo si modificamos el espacio probabilístico de $\Omega = [0,1]$ a $\Omega = (0,1]$. Naturalmente es muy fácil multiplicar ejemplos como éste. Por otra parte es intuitivo que, a menos que hubiera ejemplos más profundos, la dificultad siempre se pudiera eliminar completando o compactificando el espacio apropiadamente. En el apéndice mostramos que siempre es posible hacer eso si estamos dispuestos a cambiar de espacio probabilístico y quedarnos con un proceso estocástico equivalente.

Esto es, allí se demuestra que toda martingala L_1-acotada es equivalente a una martingala μ-dominada, que en efecto no es nada más que la representación canónica del proceso en $\mathbb{R}^\infty$ apropiadamente compactificado.

El teorema fundamental de convergencia de martingalas debido a Doob [3] establece que toda martingala L_1-acotada converge con probabilidad 1 a una función integrable. Anteriormente a esto Andersen-Jessen [1] habían demostrado que para cualquier medida signada finita μ se tiene que

$$\frac{d\mu_n}{dP_n} \to \frac{d\mu}{dP} \qquad (P \text{ a.e.}) \tag{3.6}$$

lo que en vista de la equivalencia entre martingalas L_1-acotadas y μ-dominadas (Apéndice) implica el teorema de Doob. Más aún el autor demostró en [2] el teorema de Andersen-Jessen en el caso de martingalas en forma independiente basado únicamente en la desigualdad maximal elemental para supermartingalas (4.1). Esta prueba del teorema de Doob tiene la ventaja de no depender de las desigualdades de cruce ("upcrossings inequalities") y, más importante, de colocar el teorema de convergencia de martingalas en el mismo terreno metodológico de otros teoremas clásicos de convergencia tales como los ergódicos y los de convergencia de series ortogonales.

En este trabajo vamos a ampliar el teorema de Andersen-Jessen

(3.6). El ejemplo de Dirac (3.2) ya sugiere que debe ser posible establecer en general divergencia a $+\infty(-\infty)$ en el soporte de la parte positiva (negativa) de la medida singular ν cuando $d\mu = x_\infty\, dP + d\nu$ es la descomposición de Lebesgue de μ. Este es un resultado delicado que depende de que las funciones x_n sean estrictamente F_n-medibles; obsérvese si no como se destruye la divergencia a $+\infty$ en el ejemplo (3.2) con sólo modificar el valor de $x_n(0)$ para cada n.

Para hacer más legible el trabajo incluímos la prueba completa del teorema clásico de Andersen-Jessen, esto es el límite (3.6) usando métodos nuevos que también nos entregan adicionalmente el hecho de que

$$x_n = \frac{d\mu_n}{dP_n} \to \pm\infty \qquad (\nu^{\pm}\text{ a.e.})$$

cuando $\{x_n\}$ es una martingala, o sea cuando cada $\mu_n << P_n$.

4. DESIGUALDADES MAXIMALES.

Esta sección es completamente standard y se incluye sólo por completidad.

Empezamos por la desigualdad maximal para supermartingalas no negativas. Es costumbre derivar esta desigualdad de las propiedades de los tiempos de parada ("stopping times") para supermartingalas. Para mantener la sencillez de la exposición presentamos la siguiente prueba elemental.

Teorema 4.1. Sea $\{x_n\}$ una supermartingala no-negativa y $\lambda > 0$ arbitrario. Entonces se tiene que para todo $m \geq 1$

$$P\{\omega| \sup_{k \geq m} x_k(\omega) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \| x_m \|_1 \tag{4.1}$$

Prueba: Pongamos $A_0 = \Omega$ y para cada $n \geq 1$ definamos los conjuntos

$$A_n = \{\omega | x_1(\omega) < \lambda, \ldots, x_n(\omega) < \lambda\} ,$$

$$B_n = \{\omega | x_n(\omega) \geq \lambda\} .$$

Es claro que A_n y B_n pertenecen a $\mathcal{F}_n$ y que

$$(A_{n-1} \cap B_n) \cap A_n = \phi ,$$

$$(A_{n-1} \cap B_n) \cup A_n = A_{n-1} .$$

Ahora bien

$$\{\omega | \sup_{1 \leq k \leq n} x_k(\omega) \geq \lambda\} = \sum_{k=1}^{n} (A_{k-1} \cap B_k),$$

donde la Σ denota unión disjunta. Por lo tanto

$$\lambda P(\sup_{1 \leq k \leq n} x_k \geq \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_{k-1} \cap B_k} \lambda \, dP$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_{k-1} \cap B_k} x_k \, dP$$

Si llamamos S_n a la última sumatoria tenemos usando el hecho de que $x_n \geq 0$

$$\lambda P(\sup_{1 \leq k \leq n} x_k \geq \lambda) \leq S_n \leq S_n + \int_{A_n} x_n \, dP \tag{4.2}$$

Pero entonces vemos que

$$S_n + \int_{A_n} x_n \, dP = S_{n-1} + \int_{A_{n-1} \cap B_n} x_n \, dP + \int_{A_n} x_n \, dP$$

$$= S_{n-1} + \int_{A_{n-1}} x_n \, dP$$

$$= S_{n-1} + \int_{A_{n-1}} E(x_n | F_{n-1}) dP$$

$$\leq S_{n-1} + \int_{A_{n-1}} x_{n-1}\, dP ,$$

donde hemos usado que A_{n-1} es la unión disjunta de $A_{n-1} \cap B_n$ y A_n y que $x_{n-1} \geq E(x_n | F_n)$ por ser $\{x_n\}$ supermartingala. La última desigualdad nos da por recurrencia

$$S_n + \int_{A_n} x_n\, dP \leq S_1 + \int_{A_1} x_1\, dP$$

$$= \int_{B_1} x_1\, dP + \int_{A_1} x_1\, dP$$

$$= \int x_1\, dP.$$

Esto unido a (4.2) implica que

$$\lambda P(\sup_{1 \leq k \leq n} x_k \geq \lambda) \leq \|x_1\|_1 \tag{4.3}$$

Ahora haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\lambda P(\sup_{k \geq 1} x_k \geq \lambda) \leq \|x_1\|_1$$

Finalmente para obtener (4.1) basta notar que la subsucesión $x_m, x_{m+1}, \ldots$ apropiadamente renumerada también es una supermartingala no-negativa . q.e.d.

Como corolario se obtiene la desigualdad maximal para martingalas.

Teorema 4.2 Sea $\{x_n\}$ una martingala y $\lambda > 0$ arbitrario. Entonces para todo $m \geq 1$ se tiene

$$P\{\omega \mid \sup_{k \geq m} |x_k(\omega)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{k \geq m} \|x_k\|_1 \tag{4.4}$$

Prueba: Tomemos un n fijo arbitrario con $1 \leq k \leq n$ y escribamos

$$x_k = E(x_n|F_k) = E(x_n^+|F_k) - E(x_n^-|F_k).$$

Tanto $\{E(x_n^+|F_k) \mid k = 1,2,\ldots,n\}$ como $\{E(x_n^-|F_k) \mid k = 1,2,\ldots,n\}$ son segmentos iniciales de martingalas, ergo supermartingalas no negativas a las que podemos aplicar la desigualdad (4.3). Teniendo en cuenta que

$$\{\sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \geq \lambda\} \subseteq \{\sup_{1\leq k\leq n} E(x_n^+|F_k) \geq \lambda\} \cup \{\sup_{1\leq k\leq n} E(x_n^-|F_k) \geq \lambda\}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda P\{\sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \geq \lambda\} &\leq \|E(x_n^+|F_1)\|_1 + \|E(x_n^-|F_1)\|_1 \\ &\leq \|x_n^+\|_1 + \|x_n^-\|_1 \\ &= \|x_n\|_1 .\end{aligned}$$

Ahora hacemos que $n \to \infty$ y observemos que $x_m, x_{m+1}, \ldots$ también es una martingala apropiadamente renumerada para llegar a (4.4), q.e.d.

5. CONVERGENCIA DE MARTINGALAS HEREDITARIAS

Existen varias pruebas de la convergencia puntual de las martingalas hereditarias, entre ellas algunas basadas en la desigualdad maximal (4.4), por ejemplo ver [4]. Sin embargo creemos que la siguiente expuesta en [2] es probablemente la más sencilla.

Teorema 5.1 <u>Si</u> x_∞ <u>es integrable entonces</u>

$$E(x_\infty | F_n) \to x_\infty , \tag{5.1}$$

<u>tanto en norma</u> L_1 <u>como con probabilidad</u> 1.

Prueba: Como el álgebra A definida en (2.1) genera a F se sigue que el subespacio lineal $V = \cup_{n=1}^{\infty} L_1(\Omega, F_n, P_n)$ es denso en $L_1(\Omega, F, P)$. Ahora bien, para cualquier función $x_\infty \in V$ se tiene que $E(x_\infty | F_n) = x_\infty$ desde un n adelante. Como las proyecciones $E(.|F_n)$ son contracciones se sigue entonces la convergencia (5.1) en el sentido de la norma L_1 por un argumento standard de aproximación. La convergencia con probabilidad 1 se sigue ahora del siguiente lema.

Lema. <u>Si una martingala</u> $\{x_n\}$ <u>converge en norma</u> L_1 <u>entonces - converge con probabilidad 1</u>.

Sea $x_\infty \in L_1$ y $\|x_\infty - x_n\|_1 \to 0$. Se pueden hallar enteros $\{m_k\}$

con $m_k \uparrow \infty$ y tal es que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\|x_\infty - x_{m_k}\|_1 < \infty .$$

Ahora bien, para cada k la sucesión $\{x_n - x_{m_k} | n = m_k, m_k+1, \ldots\}$ es una martingala hereditaria porque $x_n - x_{m_k} = E(x_\infty - x_{m_k} | F_n)$ si $n \geq m_k$, luego le podemos aplicar la desigualdad (4.4) para obtener

$$P\{\sup_{n \geq m_k} |x_n - x_{m_k}| > \frac{1}{k}\} \leq k\|x_\infty - x_{m_k}\|_1$$

donde debe notarse que $\sup_{n \geq m_k} \|x_n - x_{m_k}\|_1$ es igual o menor a $\|x_\infty - x_{m_k}\|_1$ Sumando las desigualdades para $k \geq 1$ se llega a

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{ \sup_{n \geq m_k} |x_n - x_{m_k}| > \frac{1}{k} \} < \infty .$$

Por lo tanto el lema de Borel-Cantelli nos dice que

$$\lim_{k \to \infty}\{ \sup_{n \geq m_k} |x_n - x_{m_k}|\} = 0$$

con probabilidad 1. Por tanto hemos probado que la sucesión $\{x_n(\omega)\}$ es de Cauchy con probabilidad 1. q.e.d.

6. SUPERMARTINGALAS NO-NEGATIVAS

Se dice que una supermartingala $\{x_n\}$ no negativa es <u>singular</u>

si existe una medida no negativa finita , P-singular, tal que

$$\int_E x_n \, dP \leq \nu(E) \qquad (6.1)$$

para todo $E \in F_n$ y $n \geq 1$. Vamos a demostrar ahora que estas supermartingalas convergen a cero con probabilidad 1. Este resultado es fundamental para nuestro teorema final (Teorema 8.2) y además obtendremos de él como Corolario el teorema clásico de Andersen-Jessen.

Primero establecemos una proposición técnica auxiliar.

<u>Proposición 6.1</u> <u>Sea ν una medida P-singular no negativa y finita en F. Sean δ_1 y δ_2 dos números positivos arbitrarios. Entonces existe un conjunto E del álgebra A definida en (2.1) tal que</u> $P(E) < \delta_1$ <u>y</u> $\nu(E^c) < \delta_2$.

Prueba: Sea N un soporte de ν, esto es, $N \in F$ y $P(N) = \nu(N^c) = 0$.

Como A genera a F la probabilidad P coincide con la medida exterior inducida en F por $P|A$. Por lo tanto existe una sucesión $\{E_k\}$ en A tal que

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \; ,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) < \delta_1 \; .$$

Como $\nu(N) = \nu(\Omega)$ se tendrá que

$$\lim_{n \to \infty} \uparrow \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \nu(\Omega).$$

Por lo tanto existe un n suficientemente grande tal que

$$\nu(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \nu(\Omega) - \delta_2 .$$

Entonces poniendo $E = \cup_{k=1}^{n} E_k$ tenemos claramente que $E \in A$ y que se cumple $\nu(E^c) < \delta_2$, al tiempo que

$$P(E) \leq P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) < \delta_1 .$$

Por tanto E es el conjunto deseado. q.e.d.

Teorema 6.2 Si $\{x_n\}$ es una supermartingala no negativa singular entonces $x_n \to 0$ con probabilidad 1.

Prueba: Sea ν una medida no negativa finita tal que se cumple (6.1) para todo $n \geq 1$ y $E \in F_n$. Demos ahora un $\varepsilon > 0$ arbitrario y apliquemos la proposición 6.1 sucesivamente con $\delta_1 = \varepsilon/2k^2$ y $\delta_2 = 1/k^3$ para $k = 1,2,\ldots$. Obtenemos así conjuntos E_k e índices $m_k \uparrow \infty$ tales que $E \in F_{m_k}$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) < \varepsilon \tag{6.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\nu(E_k^c) < \infty \tag{6.3}$$

Ahora, para cada k fijo la sucesión

$$\{x_n \, I_{E_k^c} \mid n = m_k, \; m_k + 1, \; \ldots\}$$

es una supermartingala no negativa como se verifica inmediatamente por

$$E(x_{n+1} \, I_{E_k^c} \mid \mathcal{F}_n) = E(x_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \, I_{E_k^c} \leq x_n \, I_{E_k^c}$$

cuando $n \geq m_k$. Entonces aplicando la desigualdad maximal (4.1) y tomando en cuenta (6.1) se tiene

$$P\{ \sup_{n \geq m_k} \; x_n \, I_{E_k^c} \geq \frac{1}{k}\} \leq k \int_{E_k^c} x_{m_k} \, dP \leq k\nu(E_k^c) \; .$$

Luego sumando estas desigualdades para $k = 1, 2, \ldots$ y usando (6.3) llegamos a

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{ \sup_{n \geq m_k} \; x_n \, I_{E_k^c} \geq \frac{1}{k} \} < \infty.$$

Esto dice por el lema de Borel-Cantelli que

$$\lim_{k \to \infty} \{ \sup_{n \geq m_k} \; x_k \; I_{E_k^c} \, (\omega)\} = 0$$

con probabilidad 1. O sea que $x_n(\omega) \to 0$ P a.e. fuera del con-- junto $E(\varepsilon) = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Pero $P(E(\varepsilon)) < \varepsilon$ en vista de 6.2, por tanto hay convergencia a cero P a.e. fuera del conjunto $\cap_{r=1}^{\infty} E(1/r)$ cuya probabilidad es cero. q.e.d.

Como consecuencia obtenemos el teorema de Andersen-Jessen.

Teorema 6.3 Sea μ una medida signada finita en $\mathcal{F}$. Entonces

$$\frac{d\mu_n}{dP_n} \to \frac{d\mu}{dP}$$

con probabilidad 1.

Prueba: Sea

$$d\mu = x_\infty \, dP + d\nu$$

la descomposición de Lebesgue de μ respecto a P. Para todo $E \in \mathcal{F}_n$ se tiene

$$\mu_n(E) = \mu(E) = \int_E x_\infty \, dP + \nu(E) =$$

$$= \int_E E(x_\infty | \mathcal{F}_n) dP + \nu_n(E),$$

lo que nos dice que

$$\frac{d\mu_n}{dP_n} = E(x_\infty | \mathcal{F}_n) + \frac{d\nu_n}{dP_n} \quad ,$$

lo que no debe confundirse con la descomposición de Lebesgue de μ_n respecto a P_n. Ahora, por una parte el teorema 5.1 nos dice que $E(x_\infty | \mathcal{F}_n) \to x_\infty = \frac{d\mu}{dP}$ con probabilidad 1, y, por otra parte, como

$$\frac{d\nu_n}{dP_n} = \frac{d(\nu^+|F_n)}{dP_n} - \frac{d(\nu^-|F_n)}{dP_n}$$

cada una de las supermartingalas no negativas del lado derecho convergen a 0 con probabilidad 1 por el teorema 6.2. q.e.d.

7. DOS LEMAS PARA DERIVADAS DE RADON-NIKODYM

En esta sección estableceremos dos levísimas pero delicadas generalizaciones del cálculo formal ordinario con derivadas de Radon Nikodym.

Supongamos que λ_1, λ_2, λ_3 son medidas signadas finitas en una sigma álgebra común y tales que $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \lambda_3$, entonces la conocida regla de la cadena dice que

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \cdot \frac{d\lambda_2}{d\lambda_3} \qquad (|\lambda_3| \text{ a.e.}). \tag{7.1}$$

Para nuestros propósitos posteriores necesitamos una igualdad similar, pero con las relaciones $\ll$ "desalineadas" como se expresa en la proposición 7.2. Para ello debemos establecer primero un resultado preliminar que también usaremos independientemente.

Proposición 7.1 Si λ_1 y λ_2 son dos medidas signadas finitas sobre una misma sigma álgebra, con $\lambda_1 \ll \lambda_2$, entonces se tendrá

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \cdot \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = 1 \qquad (|\lambda_1| \text{ a.e.})$$

Nótese que la igualdad vale a.e. respecto a la medida más débil.

Prueba: Escribimos las descomposiciones de Lebesgue

$$d\lambda_1 = x\, d\lambda_2$$

$$d\lambda_2 = y\, d\lambda_1 + d\lambda_3$$

con x e y integrables respecto a λ_2 y λ_1 respectivamente y $\lambda_3 \perp \lambda_1$. La siguiente manipulación formal se justifica fácilmente asumiendo primero que $x \geq 0$ y tomando una sucesión de funciones simples $x_n \geq 0$ con $x_n \uparrow x$,

$$d\lambda_1 = xy\, d\lambda_1 + x\, d\lambda_3 ,$$

donde $x\, d\lambda_3 \perp d\lambda_1$, por tanto considerando los conjuntos $\{xy \gtrless 1\}$ es fácil ver que

$$xy = 1 \quad (|\lambda_1| \text{ a.e.}).$$

Proposición 7.2 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ medidas signadas finitas sobre una misma sigma-álgebra, y supongamos que $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \lambda_3$. En tonces se tiene

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_2} = \frac{d\lambda_3}{d\lambda_1} \cdot \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \quad (|\lambda_1| \text{ a.e.}). \tag{7.2}$$

Nótese que λ_1 es la más débil y compárese con (7.1).

Prueba: En lo que sigue es importante tener en cuenta la siguiente observación trivial: Si $\lambda \ll \lambda'$ y para funciones x, y, z se tiene $x = y$ ($|\lambda|$ a.e.) y $y = z$ ($|\lambda'|$ a.e.) entonces $x = z$ ($|\lambda|$ a.e.).

Comenzamos con la regla de la cadena (7.1) en su forma ordinaria

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \cdot \frac{d\lambda_2}{d\lambda_3} \qquad (|\lambda_3| \text{ a.e.}).$$

Ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $\frac{d\lambda_3}{d\lambda_2}$. Si aplicamos la proposición 7.1 junto con la observación que hicimos arriba llegamos a

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_2} \cdot \frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \qquad (|\lambda_2| \text{ a.e.}).$$

De la misma manera multiplicamos ahora por $\frac{d_3}{d\lambda_1}$, y por idéntico razonamiento nos queda

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_2} = \frac{d\lambda_3}{d\lambda_1} \cdot \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \qquad (|\lambda_1| \text{ a.e.}),$$

que es lo que se quería demostrar. q.e.d.

8. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE MARTINGALAS μ-DOMINADAS.

Para caracterizar completamente los conjuntos de convergencia y divergencia de una martingala μ-dominada demostramos primero el siguiente teorema. Esto no es estrictamente necesario pero ciertamente aclara el asunto.

Diremos que $\{x_n\}$ es una <u>martingala singular</u> si es dominada por una medida singular de modo que 6.1 sea una igualdad.

<u>Teorema 8.1</u>. <u>Sea $\{x_n\}$ una martingala no negativa singular con medida dominante ν. Entonces $x_n \to +\infty$ ν a.e., esto es, en el soporte de ν.</u>

Prueba: Para evitar trivialidades supongamos que $\nu(\Omega) > 0$. Entonces la medida $\nu' = \nu(\Omega)^{-1}\nu$ es una probabilidad y

$$\frac{dP_n}{d\nu_n} = \nu(\Omega)\frac{dP_n}{d\nu'_n}$$

resulta ser una supermartingala no negativa por la proposición 3.1, claro está respecto al espacio probabilístico (Ω, F, ν'). Como $P \perp \nu'$ tenemos que la supermartingala en cuestión es singular así que el teorema 6.2 nos dice que

$$\frac{dP_n}{d\nu_n} \to 0 \qquad (\nu \text{ a.e.})$$

Ahora por ser $\{x_n\}$ una martingala debe tenerse que $\nu_n \ll P_n$ (ver (3.4)i) y por tanto la proposición 7.1 se aplica para dar

$$\frac{dP_n}{d\nu_n} \cdot x_n = \frac{dP_n}{d\nu_n} \cdot \frac{d\nu_n}{dP_n} = 1 \qquad (\nu_n \text{ a.e.}).$$

Naturalmente todas estas igualdades valen simultáneamente (ν a.e), así que llegamos a la conclusión deseada: $x_n \to +\infty$ (ν a.e.) q.e.d.

Antes de probar nuestro resultado final hagamos las siguientes observaciones. Si $\{x_n\}$ es una martingala dominada por μ con descomposición de Lebesgue

$$d\mu = x_\infty \, dP + d\nu \quad ,$$

entonces se tiene

$$x_n = E(x_\infty | F_n) + \frac{d\nu_n^+}{dP_n} - \frac{d\nu_n^-}{dP_n} \quad ,$$

donde sabemos que $E(x_\infty | F_n) \to x_\infty$ (P a.e.) y $\frac{d\nu_n^\pm}{dP_n} \to 0$ (P a.e.), luego $x_n \to x_\infty$ (P a.e), hecho que ya sabíamos por el teorema 6.3 de Andersen-Jessen. Sin embargo el hecho de que

$$\frac{d\nu_n^\pm}{dP_n} \to \pm\infty \quad (\nu^\pm \text{ a.e.}) \quad \text{(respectivamente)}$$

no nos dice sin más que $x_n \to \pm\infty$ ($\nu^\pm$ a.e.), ya que no sabemos si $E(x_\infty | F_n)$ diverge a $\mp\infty$ en conjuntos no triviales respecto a las medidas $\nu^\mp$. En efecto lo que necesitamos es demostrar que los infinitos de las martingalas singulares son de orden superior a los de las martingalas hereditarias, tal como uno esperaría intuitivamente. Esta es la razón para haber tenido la "delicadeza" de probar las proposiciones 7.1 y 7.2.

Teorema 8.2. <u>Sea</u> $\{x_n\}$ <u>una martingala dominada por una medida signada finita</u> μ <u>con parte P-singular</u> ν, <u>y sea</u> x_∞ <u>la densi-</u>

dad de la parte P-continua de μ. Entonces se tiene simultánea-- mente que

$$x_n \to x_\infty \quad (P \text{ a.e.}),$$

$$x_n \to +\infty \quad (\nu^+ \text{ a.e.}),$$

$$x_n \to -\infty \quad (\nu^- \text{ a.e.}).$$

Prueba: Por las observaciones precedentes o el teorema 6.3 de Andersen-Jessen sólo es necesario probar las divergencias.

En vista de que $\mu^+ \perp \mu^-$ y $\nu^+ \perp \nu^-$ y que se puede escribir

$$x_n = \frac{d\mu_n^+}{dP_n} - \frac{d\mu_n^-}{dP_n}$$

bastará con demostrar por simetría que

$$\frac{d\mu_n^+}{dP_n} \to +\infty \qquad (\nu^+ \text{ a.e.}).$$

Nótese que estamos escribiendo $\mu_n^+ = (\mu^+ | \mathcal{F}_n)$ y no $(\mu | \mathcal{F}_n)^+$. Ahora bien, para todo $n \geq 1$

$$\nu_n^+ \ll \mu_n^+ \ll P_n$$

porque $\{x_n\}$ es una martingala. Entonces aplicamos la proposi-- ción 7.2 para obtener

$$\frac{dP_n}{d\mu_n^+} = \frac{dP_n}{d\nu_n^+} \cdot \frac{d\nu_n^+}{d\mu_n^+} \qquad (\nu_n^+ \text{ a.e.}) \tag{8.1}$$

De nuevo supongamos que $\mu^+(\Omega) > 0$ y $\nu^+(\Omega) > 0$ para evitar trivialidades. Entonces por normalización de la medida ν^+ para convertirla en una probabilidad llegamos a la conclusión de que $\frac{dP_n}{d\nu_n^+}$ es una supermartingala no-negativa y singular, tal como hicimos en la prueba del teorema anterior. Por consiguiente el teorema 6.2 da

$$\frac{dP_n}{d\nu_n^+} \to 0 \qquad (\nu^+ \text{ a.e.}) \tag{8.2}$$

De la misma manera podemos normalizar la medida μ^+ para hacerla una probabilidad y entonces el teorema 6.3 de Andersen-Jessen implica que

$$\frac{d\nu_n^+}{d\mu_n^+} \to \frac{d\nu^+}{d\mu^+} \qquad (\mu^+ \text{ a.e.}), \tag{8.3}$$

y como $\nu^+ \ll \mu^+$, la convergencia también ocurre ν^+ a.e. Por otra parte es claro que

$$0 \leq \frac{d\nu^+}{d\mu^+} \leq 1 \qquad (\mu^+ \text{ a.e.}), \tag{8.4}$$

lo que también vale ν^+ a.e. Ahora (8.1), (8.2), (8.3) y (8.4) demuestran que

$$\frac{dP_n}{d\mu_n^+} \to 0 \qquad (\nu^+ \text{ a.e.}).$$

Finalmente la proposición 7.1 da

$$\frac{dP_n}{d\mu_n^+} \cdot \frac{d\mu_n^+}{dP_n} = 1 \qquad (\mu_n^+ \text{ a.e.}),$$

y también $(\nu_n^+$ a.e.). Esto prueba que

$$\frac{d\mu_n^+}{dP_n} \to +\infty \qquad (\nu^+ \text{ a.e.}).$$

Nótese que no se concluye divergencia μ^+ a.e. q.e.d.

9. APENDICE

Equivalencia de martingalas L_1-acotadas y martingalas μ-acotadas.

Teorema 9.1 Sea $\{x_n\}$ una martingala L_1-acotada definida en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces existe un espacio probabilítico $(S, \mathcal{B}, Q)$ y una martingala $\{\xi_n\}$ definida en él y tal que es equivalente a $\{x_n\}$ y μ-dominada.

Prueba: Para cada $n = 1, 2, \ldots$ sea S_n una copia de la línea real compactificada $[-\infty, +\infty]$ provista de su sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}_n$. Definimos ahora

$$S = \prod_{n=1}^{\infty} S_n \quad ,$$

con la topología producto, que es compacta y Hausdorff. Así mismo dotamos a S de su sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ que como sabemos cumple

$$\mathcal{B} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$$

También definimos la sigma-álgebras $\mathcal{B}^n$ que consisten de los cilindros medibles en $\mathcal{B}$ con base en $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n$.
Nótese que

$$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{B}$$

y que $\mathcal{B}$ está generada por el álgebra $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}^n$.

Ahora definimos una aplicación medible

$$\tau \; : \; \Omega \rightarrow S$$

dada por

$$\tau(\omega) = (x_1(\omega), \; x_2(\omega) \; , \; \ldots \;) \quad .$$

La probabilidad Q en $\mathcal{B}$ viene dada por

$$Q(B) = P(\tau^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B} \quad .$$

Ahora bien, si tomamos las proyecciones canónicas $\{\xi_n\}$ en S, esto es

$$\xi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n,$$

sabemos por la teoría general de procesos que $\{\xi_n\}$ es un proceso estocástico equivalente a $\{x_n\}$. Por lo tanto $\{\xi_n\}$ es una martingala L_1-acotada. Además es obvio que es adaptada a $\{\mathcal{B}^n\}$.

Ahora sea $\mathcal{C}$ el subespacio lineal de $C(S)$ que consta de las funciones continuas de S que sólo dependen de un número finito de coordenadas, esto es, que son $\mathcal{B}^n$-medibles para algún n.

Tomemos una función ϕ en $\mathcal{C}$ y definamos un funcional F así

$$F(\phi) = \lim_{n\to\infty} \int \phi\xi_n \, dQ.$$

Es claro que este límite existe porque debe existir un m tal que ϕ es $\mathcal{B}^m$-medible. Por lo tanto para $n \geq m$ queda

$$\begin{aligned}
\int \phi\xi_n \, dQ &= \int E(\phi\xi_n \,|\, \mathcal{B}^m)\, dQ \\
&= \int \phi E(\xi_n \,|\, \mathcal{B}^m)\, dQ \\
&= \int \phi\xi_m \, dQ.
\end{aligned}$$

Por tanto F es un funcional lineal bien definido en $\mathcal{C}$. Pero además es claro que

$$|F(\phi)| \leq \sup_n \left|\int \phi\xi_n \, dQ\right| \leq \|\phi\|_\infty \sup_n \|\xi_n\|_1 ,$$

Luego F es <u>acotado</u> en $\mathcal{C}$ /por ser $\{\xi_n\}$ L_1-acotada. Pero $\mathcal{C}$ es denso en C(S) por el teorema de Stone-Weierstrass, por tanto F tiene una extensión única a todo C(S). El teorema de representación de Riesz entonces nos produce una medida signada finita μ tal que

$$F(\phi) = \int \phi d\mu , \qquad \phi \in C(S).$$

Luego para una $\phi \in \mathcal{C}$ que sea $\mathcal{B}^n$-medible se tendrá

$$\int \phi \xi_n dQ = \int \phi d\mu .$$

La unicidad de la medida representante nos dice que $d\mu|\mathcal{B}^n$ debe coincidir con $(\xi_n \, dQ)|\mathcal{B}^n$, o sea que para todo $E \in \mathcal{B}^n$

$$\mu(E) = \int_E \xi_n \, dQ.$$

Esto es que μ domina a $\{\xi_n\}$. q.e.d.

R E F E R E N C I A S

1. E.S. Andersen and B. Jessen, Some limit theorems on set-functions. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 25, N°5, 8pp. (1948)

2. L. Bâez Duarte, Another Look at the Martingale Theorem, J. of Math. Anal. and Applications, Vol. 23, N°3, 1968, pp 551-557.

3. J.L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, N.Y. 1953, Chapter VII.

4. J. Neveu, Relations entre la thêorie ergodique et la thêorie des martingales, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 15 (1965) 31-42.