REPRESENTACION EN SERIE DE LA FUNCION H DE DOS VARIABLES

(R.K. Saxema and R.U. Verna)

Resumen

La representación es serie de la función H de dos variables fue propuesta originalmente por Verna [10]; se investiga aquí, cuando los polos del integrando se suponen sencillos. Esta representación parece no existe en la literatura.Como un número de funciones de densidad en una distribución de probabilidades estadística de doble variación, asociados con la función H de una variable, se expresan en términos de funciones H de los variables, las representaciones en serie obtenidas, serían útiles en varios problemas que se relacionan con distribuciones de probabilidades estadística.

Incidentalmente un caso especial de una de esas representaciones, da origen a la representación en serie de la función generalizada de Kampe de Feriet, definida y estudiada por Srivastava y Daoüst [8], cuyas condiciones de convergencia también son discutidas por ellos en una publicación posterior [9]. En consecuencia se ha obtenido una definición de la función de Srivastava y Daoust [8] en términos de un tipo de integral doble de Mellin Barnes.

Introducción

Agarwal (1965) dió la representación en serie de la función de Meijer de dos variables cuando los polos de la integral se suponen sencillos. Mathai y Saxema [5] obtuvieron el desarrollo de la función de dos variables de las series de la función generalizada Z y de la función generalizada P_s, cuando los polos de la integral difieren de modo cualquiera.

En el presente trabajo, los autores han obtenido un desarrollo en serie para la función H de dos variables introducida por Verna [10]. Siguiendo la notación de Saxena [2]

$$(1.1)\qquad H^{L,\,N,\,N,\,M,\,M}_{E\,,\,(A:C),\,F,\,(B:D)}\begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\begin{pmatrix} (e,\theta:\theta^1) \\ (\alpha,x)\;;\;(c,\gamma) \\ (f,\phi:\phi_1) \\ (b,\beta);\;d,\delta \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)\int_{L_1}\int_{L_2} \chi_1\begin{pmatrix} b_y;\ \alpha_j,\xi, \\ M, N; B, A \end{pmatrix} \chi_2\begin{pmatrix} d_j;c_j,\eta \\ M_1\ N_1;(D,C) \end{pmatrix} \chi_3\begin{pmatrix} 1 f_j;e_j,\xi+\eta \\ -, L;\ F,E \end{pmatrix} x\ y^{\eta}\,\delta\xi\ \delta\eta\ ,$$

donde

$$\chi_1\begin{pmatrix} b_j;\alpha_j,\xi \\ M,\ \ N;B,A \end{pmatrix} = \frac{\prod_1^M \Gamma(b_j-\beta_j\xi)\ \prod_1^N \Gamma(1-\alpha_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{M+1}^{B} \Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\ \prod_{N+1}^{A} \Gamma(\alpha_j-\alpha_j\xi)},$$

$$\chi_2\begin{pmatrix} d_j,c_j,\eta \\ M_1,N_1;D,C \end{pmatrix} = \frac{\prod_1^{M_1} \Gamma(d_j-\delta_j\eta)\ \prod_1^{N_1} \Gamma(1-c_j+\gamma_j\eta)}{\prod_{M_1+1}^{D} \Gamma(1-\delta_j+\delta_j\eta)\ \prod_{N_1+}^{C} \Gamma(c_j-\gamma_j\eta)},$$

$$\chi_3\begin{pmatrix} 1-f_j;\ e_j,\xi+\eta \\ -, L; F, E \end{pmatrix} = \frac{\prod_1^{L} \Gamma(1-e_j+\theta_j\xi+\theta_j\eta)}{\prod_{L+1}^{E} \Gamma(e_j-\theta_j\xi-\theta_j^1\eta)\prod_1^{F}\Gamma(1-f_j+\phi_j\xi+\phi_j^1\eta)},$$

x, y no son cero y un producto vacío se interpreta como unidad.

Podemos considerar diferentes trayectorias, para L_1 y L_2 (I) L_1 y L_2 varían de $-\infty$ a $+\infty$ en los planos ξ y η respectivamente con salientes si son necesarios, para asegurar que los polos de $\Gamma(b_j-\beta_j\xi)$, $j = 1, \dots, M$, y $\Gamma(d_j-\delta_j\eta)$ esten separados de los polos de $\Gamma(1-e_j+\Theta_j\xi+\Theta_j\eta)$, $\Gamma(1-\alpha_j+x_j\xi)$ y

$\Gamma(1-c_j+\gamma_j\eta)$. La integral (1.1) converge si:

$$\Psi_1 = \sum_{1}^{L} \theta_j - \sum_{L+1}^{E} \theta_j + \sum_{1}^{N} \alpha_j - \sum_{N+1}^{A} \alpha_j + \sum_{1}^{M} \beta_j - \sum_{M+1}^{B} \beta_j - \sum_{1}^{F} \phi_j > 0,$$

$$\Psi_2 = \sum_{1}^{L} \theta_j^1 - \sum_{1}^{E} \theta_j^1 - \sum_{1}^{F} \phi_j^1 + \sum_{1}^{N_1} \gamma_j - \sum_{N_1+1}^{C} \gamma_j + \sum_{1}^{M_1} \delta_j - \sum_{M_1+1}^{D} \delta_j > 0,$$

$$|\arg x| < \Psi_1 \pi | 2 , \quad |\arg y| < \Psi_2 \pi | 2 .$$

(II) L_1 y L_2 son lazos comenzando y terminando en $+\infty$ en los planos ξ y η respectivamente, y rodeando todos los polos de $\Gamma(b_j - \beta_j \xi)$ y $\Gamma(d_j - \delta_j \eta)$ a la vez en la dirección de las agujas del reloj, pero ninguno de los polos $\Gamma[(1-e_j + \Theta_j \xi + \Theta_j^1 \eta), [(1-a_j + \alpha_j \xi)$ y $\Gamma(1-c_j + \gamma_j \eta)$.

La integral (1.1) converge si:

$$\sum_{1}^{E} \theta_j - \sum_{1}^{F} \phi_j + \sum^{A} \alpha_j - \sum_{1}^{B} \beta_j < 0,$$

$$\sum_{1}^{E} \theta_j^1 - \sum_{1}^{F} \phi_j^1 + \sum_{1}^{C} \gamma_j - \sum_{1}^{D} \delta_j < 0, \ |X| < 1, \ |y| < 1.$$

(III) L_1 y L_2 son los lazos en los planos ξ y η planos respectivamente, comenzando y terminando en $-\infty$ rodeando todos los polos de ξ y h. Respectivamente amenazando y terminando en $-\alpha$ y rodeando todos los polos de $\Gamma(1 - \alpha_j + x_j \xi)$, $(j = 1, \ldots, N($, $\Gamma(1 - c_j + \gamma_j \eta)$, $(j = 1, \ldots, N_1)$.

y $\Gamma(1 - ej + \Theta j \xi + \Theta_j^1 \eta)$, $(j = 1, \ldots, L)$, una vez en la dirección positiva, pero ninguno de los polo de $\Gamma(b_j - \beta_j \xi)$,

$(j = 1, \ldots, M)$, y $\Gamma(\alpha_j \cdot \delta_j \eta)$, $(j = 1, \ldots, M_1)$.

La integral (1.1.) converge si

$$\sum_{1}^{E} \theta_j + \sum_{1}^{A} \alpha_j \geq 1, \sum_{1}^{E} \theta_j^1 + \sum_{1}^{C} \gamma_j \geq 1,$$

$$\sum_{1}^{E} \theta_j - \sum_{1}^{F} \phi_j + \sum^{A} \alpha_j - \sum_{1}^{B} \beta_j > o,$$

$$\sum_{1}^{E} \theta_j^1 - \sum_{1}^{F} \phi_j^1 + \sum_{1}^{C} \gamma_j - \sum_{1}^{D} \delta_j > 0, |x| > l, \quad |y| > l \ .$$

Esta función ha sido definida y estudiada independientemente, con una ligera variante, por Kalla y Munot [4] Gupta y Mittal [6] , y Pathak [7] , pero en esencia la función se conserva la misma.

2. REPRESENTACION EN SERIE DE (1.1.)

TEOREMA 1. Si los polos de la función Gamma que aparecen en el integrando (1.1) son simples y ninguno de los polos coinciden, se tiene.

$$(2.1) \qquad H^{L,\, N,\, N_1\, M,\, M_1}_{E,\,(A:C),\, F,\,(B:D)} \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} \begin{matrix} (e, \theta : \theta^1) \\ (\alpha, \alpha) ; (c, \gamma) \\ (f, \phi : \phi^1) \\ (b, \beta) ; (d, \delta) \end{matrix}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{P=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\prod_{\substack{1 \\ j \sim h}}^{M} \Gamma\left[b_j - \beta_j (b_h + \rho)/\beta_h \right] \prod_{1}^{N} \Gamma\left[1 - \alpha_j + \alpha_j (b_h + \rho)/\beta_h \right]}{\prod_{M+1}^{B} \Gamma\left[1 - b_j + \beta_j (b_h + \rho)/\beta_h \right] \prod_{N+1}^{A} \Gamma\left[\alpha_j - \alpha_j (b_h + \rho)/\beta_h \right]}$$

$$\times \frac{\prod_{j \sim k}^{M_1} \Gamma\left[d_j - \delta_j (d_k + \lambda)/\delta_k \right] \prod_{1}^{N_1} \Gamma\left[1 - c_j + \gamma_j (d_k + \lambda)/\delta_k \right]}{\prod_{M_1+1}^{D} \Gamma\left[1 - d_j + \delta_j (d_k + \lambda)/\delta k \right] \prod_{N_1+1}^{C} \Gamma\left[c_j - \gamma_j (d_k + \lambda)/\delta_k \right]}$$

$$\times \frac{\prod_{1}^{L} \Gamma\left[1-e_j+\theta_j(b_h+\rho)/\beta_h+\theta_j^1(\delta_k+\lambda)/\delta_k\right]}{\prod_{L+1}^{E} \Gamma\left[e_j-\theta_j(b_h+\rho)/\beta_h-\theta_j^1(d_k+\lambda)/\delta_k\right] \prod_{1}^{F} \Gamma\left[1-f_j+\phi_j(b_h+P)/\beta_h+\phi_j^1(d_k+\lambda)/\delta_k\right]}$$

$$\times \frac{x^{(b_h+\rho)/\beta_h} \; y^{(d_k+\lambda(/\delta_k} \; (-1)^{\lambda+\rho}}{\rho! \;\; \lambda! \;\; \beta_h \;\; \delta_k},$$

siempre que

$$(b\,h+\rho)\;\delta_k \sim (\delta_k+\lambda)\;\beta_h\;,\;(h=1,\;\ldots,\;M\;;\;k=1,\;\ldots,\;M_1)\;,$$
$$(\rho,\lambda=\;0,1,\ldots.),$$

$$\sum_1^E \theta_j+\sum_1^A \alpha_j-\sum_1^F \phi_j-\sum_1^B \beta_j < 0,$$

$$\sum_1^E \theta_j^1+\sum_1^C \gamma_j-\sum_1^F \phi_j^1-\sum_1^D \delta_j<0, |\,x\,|<1, |\xi|<1,$$

DEMOSTRACION. La demostración del problema se deduce calculando los residuos en los polos de

$$\xi=(b_h+P)/\beta_h\,,(h=1\,,\ldots.,\;M,\,P=0\,,1,\ldots.)\;y$$

$$\eta=(d_k+\lambda)/\delta_k\,,(\,k\;=\;1,\ldots\ldots,M_1\,;\;=\;\gamma\;0,\,1,\ldots.)\;,$$

y usando el contorno definido en **(II)**

De modo semejante se establece

TEOREMA 2. El desarrollo en serie de (1.1) puede también darse en la forma:

$$(2.2) \qquad H^{L,\, N,\, N_1,\, M,\, M_1}_{E,(A:C),F,(B:D)} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \begin{matrix} (e, \theta : \theta^1) \\ (\alpha, \alpha);\ (c, \gamma) \\ (f, \phi : \phi^1) \\ (b, \beta);\ (d, \delta) \end{matrix}$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\rho=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\prod_{1}^{M} \Gamma\left[b_j - \beta_j(\alpha_h - 1 + \rho) \mid \alpha_h \right] \prod_{j \neq h}^{N} \Gamma\left[1 - \alpha_j + \alpha_j(\alpha_j - 1 + \rho) \mid \alpha_h \right]}{\prod_{M+1}^{B} \Gamma\left[1 - b_j + \beta_j(\alpha_h \rho) \mid \alpha_h \right] \prod_{N+1}^{A} \Gamma\left[\alpha_j - \alpha_j(\alpha_h - 1 + \rho) \mid \alpha_h \right]}$$

$$\times \frac{\prod_{1}^{M_1} \Gamma\left[\delta_j - \delta_j(c_k - 1 + \lambda) \mid \gamma_k \right] \prod_{j \neq k}^{N_1} \Gamma\left[1 - c_j + \gamma_j(c_k - 1 + \lambda) / \gamma_k \right]}{\prod_{M_1+1}^{D} \Gamma\left[1 - d_j + \delta_j(c_k - 1 + \lambda) / \lambda_k \right] \prod_{N_1+1}^{C} \Gamma\left[c_j - \gamma_j(c_k - 1 + \gamma) \mid \gamma_k \right]}$$

$$\times \frac{\prod_{1}^{L} \Gamma\left[1 - e_j + \theta_j(d_k - 1 + \rho)/\alpha_h + \theta_j^1 (c_k - 1 + \lambda)/\gamma_k \right]}{\prod_{L+1}^{E} \Gamma\left[e_j - \theta_j(\alpha_h - 1 + \rho)/\alpha_h - \theta_j^1(c_k - 1 + \lambda)/\gamma_k \right] \prod_{1}^{F} \Gamma\left[1 - f_j + \phi_j(\alpha_h - 1 + \rho)/\alpha_h + \phi_j^1(c_k - 1 + \lambda)/\gamma_k \right]}$$

$$\times \frac{x^{(\alpha_h - 1 + \rho)/\alpha_h} \quad y^{(c_k - 1 + \lambda)/\gamma_k}}{\rho!\ \lambda!\ \alpha_h\ \gamma_k}$$

siempre que

$$(\alpha - 1 + P)\gamma_k \neq (c_k - 1 + \lambda)\alpha_h \ , \ (h = 1, \ldots, N\ ; k = 1, \ldots, N_1),$$

$$(P, \lambda = 0, 1, \ldots.) \ ,$$

$$\sum_{1}^{E} \theta_j + \sum^{A} \alpha_j - \sum_{1}^{F} \phi_j - \sum_{1}^{B} \beta_j > 0 \ , \ \sum_{1}^{E} \theta_j^1 + \sum_{1}^{C} \gamma_j + \sum_{1}^{F} \phi_j^1 - \sum_{1}^{D} \delta_j > 0 \ , |x| >, |y| > 1.$$

3. APLICACIONES

Merece mencionarse el siguiente caso especial de $(2.1)_1$ (i) Tomando todas las constantes reales positivas $\Theta j, \Theta j, \alpha j, \gamma j, \phi j, \phi j, \beta j, \delta j$ como unidad, (2.1) da la representación en serie de la función G de Meijer de dos variables, obtenidas antes por Agarwal [1].

(ii) Tomando $L = E = A'$, $N = A = B'$, $N_1 = C = B''$, $M = M_1 = 0$, $F = C'$, $B = D'$, $D = D''$, reemplazando

$1\text{-}e_j$, $1\text{-}f_j$, $1\text{-}a_j$, $1\text{-}c_j$, $1\text{-}b_j$ y $1\text{-}d_j$

e_j, f_j, a_j, c_j b, y d_j respectivamente,

$b_h = 0, (h = 1, \ldots, M)$, $d_k = 0$, $(k = 1, \ldots, M_1)$, y

$\beta_h = 1$, $(h = 1, \ldots, M)$, $\delta_k = 1$, $(k = 1, \ldots, M_1)$ llegamos a

la función generalizada de Kampede presentada por Srivastava y Daoust [8].

(iii) Tomando todas las componentes reales en (2.1) como unidades, ($L = E = m$, $F = n$, $N = A = x$, $b_h = 0$, $d_k = 0$, $\beta_h = 1$, $(h = 1, \ldots, M)$, $\delta_k = 1$, $(k = 1, \ldots, M_1)$, $N_1 = C = \mu^1$, $M = M_1 = 0$, $B = \nu$, $D = \nu^1$, y reemplazando $1\text{-}e_j$, $1\text{-}f_j$, $1 a_j$, $1\text{-}c_j$, $1 b_j$ y $1\text{-}d_j$ y $e_j, f_j, \alpha_j, c_j, b_j$, y d_j respectivamente.

(2.1) se llega a la bien conocida función de Kampe de Feriet [8]

(iv) usando la identidad

$$\lim_{y \to O} H^{O,\,N,\,O,\,M,\,I}_{O,\,(A:O),\,O,\,(B:I)}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (\alpha, x)\, j - \\ - \\ (b, \beta)\, j\, (I, I) \end{matrix}\right] = H^{M,\,N}_{A,\,B}\left(x \middle| \begin{matrix} (a, \alpha) \\ (b, \beta) \end{matrix}\right),$$

se llega al desarrollo en serie de la función H debida a Braaksma [3].

De modo similar, se pueden exponer casos especiales de (2.2) que comprenden las varias funciones de dos variables dispersas en toda la literatura, pero por razones de brevedad no se presenta aquí.