INTEGRAL DE FUNCIONES QUE ENCIERRAN COMO NUCLEO LA FUNCION G

Por R. U. VERMA

Resumen

El presente trabajo trata de ciertas ecuaciones integrales cuyas soluciones pueden hallarse usando la técnica de los operadores L y L^{1-}. L y L^{-1} denotan las transformadas de Laplace y su inversa respectivamente. Después se deducen ciertos casos especiales dl resultado principal. Las fórmulas obtenidas parecen ser de interés general.

1.—INTRODUCCION

En los trabajos recientes de Fox [3] se han resuelto cierto tipo de ecuaciones integrales, por medio de los operadores L y L^{-1}. Los operadores L y L^{-1} denotan la transformada de Laplace y su inversa respectivamente. Esas soluciones requieren extensas tablas [2] de la transformada de Laplace y su inversa, que existen. El objeto de este trabajo es detrminar la solución de una ecuación integral que tienen como núcleo de Función G, por medio de los operadores L y L^{-1}.

La ecuación integral del tipo

(1.1)

$$\int_0^\infty (x/t)^v \; G_{1,2}^{2,0}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ b,\ c \end{matrix}\right) f(t)\, dt = g(x)\ , \qquad x>0,$$

donde g está dada y f es la función desconocida por determinar, cuya solución será determinada aquí. En (1.1),

$G^{2,0}_{1,2}(x)$ [1, p. 207] denota

(1.2)

$$G^{2,0}_{1,2}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ b,\ c \end{matrix}\right) = (2\pi i)^{-1} \int_C M_{2,1}(s)\, x^{-s}\, ds \,,$$

donde

(1.3)

$$M_{2,1}(s) = \Gamma(b+s)\, \Gamma(c+s) \quad \{\Gamma(a+s)\}^{-1} \,,$$

(1.4)

$$\mathcal{M}\left[G^{2,0}_{1,2}(x) \right] = M_{2,1}(s) \,,$$

donde $\mathcal{M}$ denota la transformada de Mellin.

Recordamos los siguientes teoremas de Fox [3] que se necesitarán para llegar a la solución.

TEOREMA: Si,

(i) $\alpha > 0$, $\frac{1}{2}\alpha + \beta > 0$, $t > 0$,

(ii) $s = \delta + i\mu$, δ and μ both real;
$F(s) \in \pounds\ (\frac{1}{2} - i\infty,\ \frac{1}{2} + i\infty)$,

luego

(1.5)

$$L^{-1} \left\{ (2\pi i)^{-1} \int_C \Gamma(\alpha s + \beta) \quad F(s)\, t^{-\alpha s - \beta}\, ds \right\}$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_C F(s)\, x^{-\alpha s+\beta-1}\, ds ,$$

donde, para ambos intervalos, el contorno C puede ser la recta $\delta = \frac{1}{2}$, recta paralela al eje imaginario en el plano complejo a.

Luego, recordamos el teorema de Mellin - Parseval:

Si,

(1.6)

$$M\,[h(u)] = H(s) \text{ y } M\,[f(u)] = F(s) ,$$

luego

(1.7)

$$\int_0^\infty h(u) \quad f(u) \quad du = (2\pi i)^{-1} \int_C H(s) \quad F(1-s) \quad ds ,$$

donde C es un contorno apropiado en el plano a y M denota la transformada de Mellin.

2.—Solución de (1.1) como ecuación integral

TEOREMA: Si,

(i) $b>0$, $c>0$, $a>-\frac{1}{2}$;
(ii) $f(x) \in \mathcal{L}_2\,(0, \infty)$;
(iii) $s^{b+c-a}\, F(1-s) \in \mathcal{L}\,(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$;
(iv) $F(1-s) \in \mathcal{L}\,(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$ y
(v) $y^{-\frac{1}{2}}\, f(y) \in \mathcal{L}\,(0,\infty)$, donde $f(y)$ es de variación limitada cerca del punto $y=t$, luego la solución de (1.1), como ecuación integral de $f(t)$ es:

(2.1)

$$f(t) = t^{\nu-b}\, L^{-1} \{ \; x^{a-b}\, L\, [\; t^{a-c}\, L^{-1} \; \{ \; x^{-c-\nu}\, g(x) \; \} \;] \; \}.$$

Demostración: Con objeto de resolver (1.1), aplicamos primero (1.7) a la parte izquierda de (1.1). Luego, eliminamos los tres factores de la función Gamma del integrando de la ecuación resultante usando los operadores L^{-1} y L. Haciendo el desarrollo asintótico de la función [8] a lo largo de la recta $s = \frac{1}{2} + si$ para $|t|$ grandes, se puede mostrar que podemos usar la ecuación (1.5) para eliminar el factor de función Gamma del integrando por el operador L^{-1}. Luego, de nuevo podemos aplicar el operador L para eliminar el factor de función Gamma del denominador. Así llegamos al resultado (2.1).

3.—APLICACION

(A) Tomando

$$\nu = 0,\ a = \mu - + \tfrac{1}{2},\ b = 2\mu,\ c = 0,$$

nuestro teorema conduce a

COROLORIO: Si,

(i) $\mu > 0,\ \mu - k > -1;$
(ii) $f(x) \in \mathfrak{L}_2(0, \infty);$
(iii) $s^{\mu + k - \frac{1}{2}}\ F(1-s) \in \mathfrak{L}\ (\tfrac{1}{2} - i\infty,\ \tfrac{1}{2} + i\infty);$
(iv) $F(1-s) \in \mathfrak{L}\ (\tfrac{1}{2} - i\infty,\ \tfrac{1}{2} + i\infty)$, y
(v) $y^{-\frac{1}{2}} f(y) \in \mathfrak{L}\ (0, \infty)$, donde $f(y)$ es de variación limitada cerca del punto $y = t$,

luego

(3.1)

$$\int_0^\infty [(xt)^{\mu - \frac{1}{2}}\ e^{-\frac{1}{2}xt}\ W_{k,\mu}(xt)]\ f(t)\ dt = g(x),\ x > 0,$$

tiene solución:

(3.2)

$$f(t) = t^{-2\mu} L^{-1} \{ x^{-\mu - k + \frac{1}{2}}\ L [t^{\mu - k + \frac{1}{2}} L^{-1} \{ g(x) \}] \},$$

$W_{k,\mu}(z)$ siendo la función de Whittaker [8,p.334]. Esta solución fue obtenida recientemente por [4,(12)].

(B) De nuevo, si escribimos $t^{-\nu} f(t) = f_1(t)$ y $t^{-\nu} g(t) = g_1(t)$, la ecuación (1.1) se reduce a la ecuación integral.

(3.3)

$$\int_0^\infty G^{2,0}_{1,2}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ b,c \end{matrix}\right) f_1(t)\, dt = g_1(x), \ (x>0),$$

cuya solución puede escribirse bajo las mismas condiciones que el teorema principal como:

(3.4)

$$f_1(t) = t^{-b} L^{-1} \{ x^{a-b} L \ [t^{a-c} L^{-1} \ \{ x^{-c} g_1(x) \}] \}.$$

(C) Con $\mu + k = \frac{1}{2}$ en (3.1), encontramos

(3.5)

$$L\,[f(t)] = g(x).$$

(3.6)

$$f(t) = L^{-1}\{g(x)\}.$$

REFERENCIAS

1. Erdélyi, A.: Higher Transcendental functions, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
2. Erdélyi, A.: Tables of integral transforms, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.
3. Fox, C.: Solving integral equations by L and L^{-1} operators, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), Nº 2, pp. 299-306.
4. Fox, C.: Application of Laplace transforms and their inverses, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), Nº 1, pp. 193-200.
5. Titchmarsh, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, 1937.
6. Verma, R. U.: Application of Laplace transform in the solution of integral equations, Boletin Acad. Cien. Fis. Mat. Natur., (Caracas), vol. 34 (1974), Nº 101, pp. 13-22.
7. Varma, R. S.: On a generalization of the Laplace integral, Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A 20 (1951), pp. 209-216.
8. Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1915.
9. Widder, D. V.: The Laplace transform, Princeton, University Press, 1946.