UN TEOREMA DE ECUACION INTEGRAL

por V. D. KORANNE

1.—El objeto de este trabajo es demostrar un teorema sobre funciones de dos variables que en condiciones apropiadas satisfacen la ecuación integral.

$$f(x, y) =$$

$$x^{\lambda_1} \cdot {}^{\lambda_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{a_1x - b_1u + a_2y - b_2v} J_{\lambda_1}^{M_1} (x^{M_1} u) \quad J_{\lambda_2}^{M_2} (y^{M_2} v) \; f(u, v) \, dudv$$

donde $J_\lambda^M (x)$ es la función de Bessel - Maitland [1] definida por

$$J_\lambda^M (x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-x)^\alpha}{\alpha \, j \, \Gamma (1+\lambda+M\alpha)} \qquad ; \qquad (M>0).$$

La transformada de la función precedente como núcleo ha sido estudiada por R. Kumar [2].

Es interesante observar que este teorema conduce a (i) una expresión general para funciones que son R_M, ν, i.e. por ejemplo, la cual satisface la ecuación integral.

$$f(x, y) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{xytz} \quad J_M (xt) \; J_\nu (yz) \; f(t, z) \, dtdz, \; R(M, \nu) > -1$$

y (ii) un resultado generalizado en dos variables análogas al muy conocido teorema de Tricomi [3].

2.—*Teorema:* La función f (x, y) determinada por

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\nu_1 - i\infty}^{\nu_1 + i\infty} \int_{\nu_2 - i\infty}^{\nu_2 + i\infty} e^{px + qy} \varnothing (p, q) \, dpdq \qquad (2.1)$$

satisface la ecuación integral

$$f(x, y) =$$

$$x^{\lambda 1} y^{\lambda 2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{a_1 x - b_1 u + a_2 y - b_2 v} J_{\lambda 1}^{M1} (x^{M1} u) J_{\lambda 2}^{M2} (y^{M2} v) f(u, v) \, dudv$$

donde la relación funcional (2.2)

$$\varnothing (p, q) = \frac{\varnothing \{ b_1 + (p - a_1)^{-M1}, b_2 + (q - a_2)^{-M2} \}}{(p - a_1)^{1 + \lambda 1} (q - a_2)^{1 + \lambda 2}} \qquad (2.3)$$

se conserva.

Este teorema es válido para

(i) $f(u, v) = 0 (u^{-1 + \epsilon_1}, v^{-1 + \epsilon_2})$

cuando u y v son pequeños y $(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$.

(ii) $f(u, v) = 0 (u^{\beta 1} . e^{S1u}, v^{\beta 2} . e^{S2v})$

cuando u y v son grandes.

(iii) $p \equiv \gamma_1 + i\eta_1$, $q = \gamma_2 + i\eta_2$,
$\gamma_1 > c_1$, $\gamma_2 > c_2$; $(M_1, M_2) > 0$;

$R(\lambda_1, \lambda_2) > -1$; $R(p - S_1) > 0$,
$R(p - S_2) > 0$, $R(b - S_1) > 0$

$R(b_2-S_2) > 0$; $R(p-a_1) > 0$, $R(q-a_2) > 0$;

$R(c_1-S_1) > 0$, $R(c_2-S_2) > 0$.

Si $R(S_1 - b_1) = R(S_2 - b_2) = 0$, el teorema subsiste para

$(M_1, M_2) < 1$. Para $M_1 = M_2 = 1$, las condiciones adicionales

$R(\lambda_1 - 2\beta_1) > 0$, $R(\lambda_2 - 2\beta_2) > 0$, deben ser satisfechas.

Demostración: Sea $\varnothing(p, q)$ la transformada de Laplace de $f(x, y)$ de modo que

$$\varnothing(p, q) = \int_0^\infty \int e^{-px-qy} f(x, y)\, dxdy$$

$R(p-S_1) > 0$, $R(q-S_2) > 0$.

Luego si $f(x, y)$ satisface (2.2) tenemos

$$\varnothing(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} e^{-px-qy}\, dxdy \; x$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{+a_1x-b_2u+a_2y-b_2-v} J_{\lambda_1}^{M_1}(x^{M_1} u)\, J_{\lambda_2}^{M_2}(y^{M_2} v)\, f(u, v)\, dudv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-b_1u-b_2v} f(u, v)\, dudv \; x$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda_1} \cdot y^{\lambda_2}\, e^{-(p-a_1)x} \cdot e^{-(q-a_2)y} J_{\lambda_1}^{M_1}(x^{M_1} u)\, J_{\lambda_2}^{M_2}(y^{M_2} v)\, dxdy \qquad (I_1)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-b_1u - b_2v} f(u, v) \, dudv \; x \sum_{\alpha_1}^{\infty} \frac{(-u)^{\alpha 1}}{\alpha_1 \, j \, \Gamma(1+\lambda_1+M_1\alpha_1)} \; x$$

$$\sum_{\alpha_2}^{\infty} \frac{(-v)^{\alpha 2}}{\alpha_2 \, j \, \Gamma(1+\lambda_2+M_2\alpha_2)} \; x$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda_1+M_1\alpha_1} \, y^{\lambda_2+M_2\alpha_2} \, e^{-(p-a_1)x} \, e^{-(q-a_2)y} \, dxdy \qquad \ldots (I_2)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-b_1u - b_2v} f(u_2 \; v) \, dudv \; x \sum_{\alpha_1}^{\infty} \frac{(-u)^{\alpha 1}}{\alpha_1 \, j \, (p-a_1)^{1+\lambda_1+M_1\alpha_1}} \; .$$

$$\sum_{\alpha_2}^{\infty} \frac{(-u)^{\alpha 2}}{\alpha_2 \, j \, (q-a_2)^{1+\lambda_2+M_2\alpha_2}} \; .$$

x dudv

$$= \frac{1}{(p-a_1)^{\lambda_1+1} \; . \; (q-a_2)^{\lambda_2+1}} \; x$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-b_1u-(p-a_1)^{M1} \; . \; u - b_2v - (q-a_2)^{-M2}v} \; f(u, v) \, dudv$$

$$= \frac{\varnothing \; \{b_1 + (p-a_1)^{M1} \; . \; b_2 + (q-a_2)^{-M2}\}}{(p-a_1)^{\lambda 1+1} \; . \; (q-a_2)^{\lambda 2+2}}$$

y luego por [4]

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{V_1 - i\infty}^{V_1 + i\infty} \int_{V_2 - i\infty}^{V_2 + i\infty} e^{px+qy} \varnothing(p, q)\, dp\, dq$$

siempre que $p \equiv$

$V_1 + i\eta_1$, $q \equiv V_2 + i\eta_2$,
$V_1 > c_1$, $V_2 > c_2$,
$R(c_1 - s_1) > 0$, y $R(c_2 - s_2) > 0$.

Sólo queda por justificar las inversiones de los pasos I_1 y I_2.
Sabemos que

$$\text{como } x \to \infty, J_\lambda^M(x) = 0 \left[x^{-k(a+\frac{1}{2})} \exp.\left\{ (Mx)^k \frac{\operatorname{Cos}(\eta k)}{Mk} \right\} \right]$$

$$k = \frac{1}{M+1} \text{ como } x \to 0\ J_\lambda^M(x) = 0\ (1)$$

Por lo tanto ambas integrales convergen absolutamente por virtud del teorema de De La Valle Poussin [5], y se justifica la inversión en el paso I_1.

La inversión del paso I_2 es válida ya que
(i) cada término

$$T_\alpha(x) \equiv \frac{(-x^M u)^\alpha}{\alpha\, j\, \Gamma(1+\lambda+M\alpha)}$$

de la serie es continuo.

(ii) $\Sigma\, |T\alpha\ (x)|$ es uniformemente convergente en intervalos amplios cualesquiera $(0, \alpha)$
y (iii)

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\lambda}\, e^{-(p-a)x}\, |T\alpha\ (x)|\, dx$$

converge a

$(p-a)^{-\lambda-1} \exp. \{p-a)^{-M} u\}$.

Ejemplo:

Si tomamos

$$\varnothing (p, q) = \frac{\Gamma\nu_1}{(p-a_1)^{\nu 1}} \times \frac{\Gamma\nu_2}{(p-a_2)^{\nu 2}} \; ; \; R(\nu_1, \nu_2) > 0$$

y

$b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$

luego la relación funcional (2.3) se satisface siempre que

$$M_1 = \frac{\lambda_1 + 1 - \nu_1}{\nu_1}, \quad M_2 = \frac{\lambda_2 + 1 - \nu_2}{\nu_2}$$

Por lo tanto

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{r_1 - i\infty}^{r_2 + i\infty} \int_{r_2 - i\infty}^{r_2 + i\infty} e^{px+qy} \frac{\Gamma\nu_1}{(p-a_1)^{\nu 1}} \cdot \frac{\Gamma\nu_2}{(q-a_2)^{\nu 2}} \, dpdq$$

$$= x^{\nu_1 - 1} e^{a_1 x} \cdot y^{\nu_2 - 1} e^{a_2 y},$$

satisface la ecuación integral (2.2) con $b_1 = a_1$, $b_2 - a_2$

y

$$M_1 = \frac{\lambda_1 + 1 - \nu_1}{\nu_1}, \quad M_2 = \frac{\lambda_2 + 1 - \nu_2}{\nu_2}$$

siempre que

$p \equiv r_1 + i\eta_1$, $q = r_2 + i\eta_2$; $r_1 > c_1$, $r_2 > c_2$;
$M_1 > 0$, $M_2 > 0$,

$R\ (p-a_1, q-a_2) > 0$; $R\ (c_1-a_1, c_2-a_2) > 0$;
$R\ (2\nu_1, 2\nu_2) > 0$, $R\ (\lambda_1+1, \lambda_2+1) > 0$.

3.—Corolario. Si (f (x, y) es la función determinada por

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{r_1-i\infty}^{r_1+i\infty} \int_{r_2-i\infty}^{r_2+i\infty} a^{+px+ay} \varnothing (p, q)\, dpdq \tag{3.1}$$

y $\varnothing$ (p, q) satisface la relación funcional

$$\varnothing (p, q) = \frac{\varnothing \{a_1+(p_1-a_1)^{-1} \quad a_2+(q-a_2)^{-1}\}}{(p-a_1)^{v1+1} \quad (q-a_2)^{v2+2}}$$

luego

$$e^{-a_1\frac{x^2}{2} \quad -a_2\frac{y^2}{2}} \cdot x^{-\nu_1+1/2} \ v^{-\nu_2+1/2} \ f\left(\frac{x^2}{2} \quad \frac{y^2}{2}\right)$$

como $R\nu_1$, ν_2

siempre que

(i) $f(x, y) = 0\ (x^{-1+\epsilon_1}, y^{-1+\epsilon_2})$
cuando x e y son pequeñas $(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$.

(ii) $f(x, y) = 0\ (x^{\beta_1} e^{s_1 x}, y^{\beta_2} e^{s_2 y})$
cuando x e y son grandes.

(iii) $p \equiv r_1+i\eta_1$, $q \equiv r_2+i\eta_2$; $r_1 > c_1$, $r_2 > c_2$; $R\ (p, q) > 0$;
$R\ (\nu_1-\nu_2) > -1$; $R\ (p_1-s_1, q-s_2) > 0$; $R\ (p-a_1, q-a_2) > 0$;
$R\ (s_1-a_1, s_2-a_2) < 0$; $R\ (c_1-s_1, c_2-s_2) > 0$.
Si $R\ (s_1-a_1, s_2-a_2) = 0$, la condición adicional
$R\ (\nu_1-2\beta_1, \nu_2-2\beta_2) > -1/2$ debe ser satisfecha. Haciendo
$M_1=1$, $M_2=1$, $a_1=b_2$ y $\lambda_1=\nu_1$, $\lambda_2=\nu_2$ (2.3) se reduce a (3.2) y 2.2) da
$M_1=1$, $M_2=1$, $a_1=b_2$, $a_2=b_2$ y $\lambda_1=\nu_1$, $\lambda_2=\nu_2$ (2.3)
se reduce a (3.2) y da

$$f(x, y) = x^{\nu_1} y^{\nu_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{a_1x - a_1u + a_2y - a_2v} J^1_{\nu 1}(xu) J^1_{\nu 2}(yv) f(u, v)\, dudv$$

ó

$$x^{\frac{-\nu_1}{2}} y^{\frac{-\nu_2}{2}} e^{a_1x - a_2y} \quad f(x, y)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty J_{\nu 1}(2 \sqrt{xu}) J_{\nu 2}(2 \sqrt{yv})\, u^{-\nu_{1/2}} v^{-\nu_{2/2}} e^{-a_1u - a_2v} f(u, v)\, dudv$$

Reemplazando x por $x^2/2$, y por $y^2/2$, u por $u^2/2$ y v por $x^2/2$ obtenemos

$$x^{-\nu_1 + 1/2} y^{-\nu_2/2 + 1/2} e^{-a_1 x^2/2 - a_2 y^2/2} \quad f\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{xyuv}\, J_{\nu 1}(xu) J_{\nu 2}(yv)$$

$$u^{-\nu_1 + 1/2} v^{-\nu_2 + 1/2} e^{+a_1\frac{u^2}{2} + a_2\frac{v^2}{2}} \times f\left(\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}\right) dudv$$

por ejemplo:

$$x^{-\nu_1 + 1/2} y^{-\nu_2 + 1/2} e^{-a_2\frac{x^2}{2} - a_1\frac{y^2}{2}} \quad f\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$$

como $R_{\nu 1, \nu 2}$

Tomando $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, obtenemos

si f (x, y) es la función determinada de

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{r_1 - i\infty}^{r_1 + i\infty} \int_{r_2 - i\infty}^{r_2 + i\infty} e^{px+qy} \varnothing (p, q)\, dpdq$$

y $\varnothing$ (p, q) satisface la relación funcional

$$\varnothing (p, q) = p^{-\nu_1 - 1}\, q^{-\nu_2 - 1}\, \varnothing \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

luego en condiciones apropiadas

$$x^{-\nu_1 + \frac{1}{2}}\, y^{-\nu_2 + \frac{1}{2}}\, f\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$$

como $R_{\nu 1,\ \nu 2}$.

4.—De $\int$ 2, resulta evidente el teorema siguiente

Si $\varnothing (p, q) \doteqdot\doteqdot f(u, v)$

Luego

$$\frac{1}{(p - a_1)^{\lambda_1 + 1}\,(p - a_2)^{\lambda_2 + 1}}$$

$$\varnothing \{b_1 + (p - a_1)^{-M1},\ b_2 + (q - a_2)^{-M2}\}$$

$$\doteqdot\doteqdot x\lambda^1 y\lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{a_1 x - b_1 u + a_2 y - b_2 v}\, J^{M1}{}_{\lambda 1}(x^{M1} u)\, J^{M2}{}_{\lambda 2}(x^{M2} u)\, f(u, v)\, dudv$$

Siempre que

(i) $\quad ((u, v) = 0 ({}^{-1 + \epsilon_1}, v^{-1 + \epsilon_2})$
cuando u y v son pequeñas

(ii) $f(u, v) = 0\,(u^{\beta_1} e^{s_1 u}, v^{\beta_2} e^{s_2 v})$
cuando u y v son grandes

(iii) $R(\lambda_1\ \lambda_2) > -1$; $R(p-a_1, q-a_2) > 0$; $R(s_1-b_1, s_2-b_2) < 0$, $(M_1, M_2) > 0$; $R(p-s_1, q-s_2) > 0$.

Si $f(u, v) = 0\,(u^{\beta_1} e^{s_1 u}, v^{\beta_2} e^{s_2 v})$ y $R(s_1-b_1, s_2-b_2) = 0$ el teorema subsiste para $(M_1, M_2) < 1$.

También subsiste para $M_1 = 1$, $M_2 = 1$ con las condiciones adicionales siguientes $R(\lambda_1-2\beta_1, \lambda_2-2\beta_2) > -½$ se satisface. En particular si $a_1=a_2=b_1=b_2=0$ y $M_1=M_2=1$, obtenemos el teorema de Tricomi para dos variables.

Si $\varnothing(p, q) \doteqdot\doteqdot f(u, v)$, luego en condiciones apropiadas

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\lambda_1/2} \left(\frac{y}{v}\right)^{\lambda_2/2} J_{\lambda_1}(2\sqrt{xu})\, J_{\lambda_2}(2\sqrt{yv})\, f(u, v)\, du dv$$

5.—Cierto número de integrales puede evaluarse con ayuda de este teorema.

Como ilustración tenemos

$$\varnothing(p, q) = \frac{1}{p^{\nu_1+}\ q^{\nu_2+1}}$$

De modo que

$$f(x, y) = \frac{x^{\nu_1} . y^{\nu_2}}{\Gamma(\nu_1+1)\ \Gamma(\nu_2+1)} ;\ R\ \nu_1, \nu_2) > -1$$

y

$$\frac{1}{p^{\lambda_1+1}\ q^{\lambda_2+1}} \varnothing\{1+p^{M1}, 1+q^{M-2}\}$$

$$= \frac{p^{M_1(\nu_1+1)-\lambda_1-1} \; q^{M_2(\nu_2+1)-\lambda_2-1}}{(1+p^{M_1\nu_1+1}) \; (1+q^{M_2\nu_2+1})}$$

Caso I. Cuando $M_1=M_2=3$; $\nu_1=\nu_2=-\frac{1}{2}$ y $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, tenemos

$$\frac{1}{p^{3/2} \quad q^{3/2}} \quad \varnothing \, \{1+p^{-3}, 1+q^{-3}\}$$

$$= \frac{1}{(1+p^3)^{1/2} \, (1+q^3)^{1/2}}$$

$$\doteqdot \doteqdot \frac{4}{9} \pi \sqrt{xy} \quad J_{1/6}, {}_{-1/6}(x) \; .$$

$$J_{1/6}, {}_{-1/6}(y)$$

donde

$$J_M \text{ y } \nu \, (x) =$$

$$\frac{x^{M+\nu}}{3^{M+\nu} \, \Gamma(M+1) \; \Gamma(\nu+1)} \; x \; O \, F_2 \, (M+1, \nu+1; -\frac{x^3}{27}).$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{-1/2} \; v^{-1/2} \; J^3_{1/2} \; (x^3 \; u) \; J^3_{1/2} \; (y^3 \; v) \quad e^{-u-v} \, dudv$$

$$= \frac{4\pi^2}{9} \, J_{1/6}, {}_{-1/6}(x) \; .$$

$$J_{1/6}, {}_{-1/6}(y)$$

Caso II. Cuando $M_1=M_2=3$; $\nu_1=\nu_2=-\frac{1}{2}$ y $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$

tenemos

$$p^{-1/2} q^{-1/2} \varnothing \quad (1+p^{-3}, 1+q^{-3}) = \frac{pq}{(p^3+1)^{1/2} \ (q^3+1)^{1/2}}$$

$$\doteqdot\doteqdot \frac{4}{9} \pi \sqrt{xy} \quad J_{-1/6}, {}_{-5/6} (x) \ . \ J_{-1/6}, {}_{-5/6} (y)$$

y por lo tanto

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{-1/2} v^{1/2-} \quad e^{-u-v} J^3_{-1/2} (x^3 u) J^3_{-1/2} (y^3 v) \, dudv$$

$$= \frac{4\pi^2}{9} xy \ J_{-1/6}, {}_{-5/6} (x) \ . \ J_{-1/6}, {}_{-5/6} (y)$$

Caso III. Cuando $M_1 = M_2 = 2$; $\nu_1 = \nu_2 = {}_20$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

y así

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} \quad J^2_0 (x^2 u) \quad J^2_0 (y^2 v) \, du \, dv = \frac{\text{Sin } x \ \text{Sin } y}{xy}$$

Caso IV. Cuando $M_1 = M_2 = 2$; ${}_1\nu = \nu_2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\frac{1}{p^2 q^2} \varnothing \ (1+\frac{1}{p^2}, \ 1+\frac{1}{q^2}) = \frac{1}{(1+p^2) \ (1+q^2)} \doteqdot\doteqdot \text{Sin } x \ \text{Sin } y$$

$$\frac{1}{pq} \varnothing \ (1+\frac{1}{p^2}, \ 1+\frac{1}{q^2}) = \frac{1}{(1+p^2) \ (1+q^2)} \doteqdot\doteqdot \text{Cos } x \ . \ \text{Cos } y$$

y así

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} \quad J^2_0 (x^2 u) \quad J^2_0 (y^2 v) \, dudv = \text{Cos } x \ . \ \text{Cos } y$$

Caso V. Cuando $M_1 = M_2 = 2$; $\nu_1 = \nu_2 = -\frac{1}{2}$; $\lambda_1 = {}_2\lambda = 0$

$$\frac{1}{pq} \varnothing \left(1 + \frac{1}{p^2}, 1 + \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{1/2} \, (1+q^2)^{1/2}} \doteqdot\doteqdot J_0(x) \, . \, J_0(y)$$

y por lo tanto

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{-1/2} \, v^{-1/2} \, e^{-u-v} \, J_0^2 \, (x^2 \, u) \, J_0^2 \, (y^2 \, v) \, dudv$$

$$= \pi \, J_0(x) \, . \, J_0(y).$$

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al Dr. R. K. Saxena, del Colegio Regional de Ingenieros, Visvesvaraya de Nagpur por su amable ayuda y guía durante la preparación de este trabajo.

REFERENCIAS

1. Wright E. M.: "The asymtotic expansion of generalised Bessel Function". Proc. Lond. Math. Soc. 2138, 257-270 (1935).
2. R. Kumar: "Some theorems connected with generalised Hankel-transform". Rivesta di Matematica della Univerita di Parma 7. 321-332 (1956).
3. Tricomy, F.: Rendice Acc. de Iincie (5), 22, 564 (1935).
4. Ditkin V. A. & Prudnikov A. P.: "Operational Calculus in two variables and its application". Pergamon Press (1962).
5. Bromwich T. J. I. A.: "Introduction to Theory of Infinite Series". (1932).