SOBRE CALCULO OPERACIONAL

Por N. E. F. de Batting
y S. L. Kalla *

1. INTRODUCCION

Sea $f(t)$ cualquier función de una determinada clase de funciones definida sobre un dado intervalo (a, b). Sea además $K(p, t)$ otra función definida sobre el mismo intervalo para cada valor de p, parámetro cuyo dominio está determinado, entonces, siguiendo la notación de Erdélyi [5] sobre transformada integral $T\{f(t); p\}$ de $f(t)$ ella es definida por medio de la ecuación integral:

$$\varphi(p) = T\{f(t); p\} = \int_a^b K(t, p) f(t)\, dt \tag{1.1}$$

donde la clase de funciones y el dominio del parámetro son prefijados de modo que la integral tenga sentido. La función $K(t; p)$ es conocida como el núcleo de la transformada. Cuando los límites (a, h) son ambos finitos (1.1) es llamada la transformada integral finita. Nosotros consideramos el caso donde el núcleo $K(t; p)$ es función de tp solamente, es decir: $K(t; p) = K(p; t) = K(pt)$ y los límites de integración en (1.1) son $(0, \infty)$, pues este caso tiene muchas aplicaciones.

El caso más simple de núcleo $K(p, t)$ es e^{-pt} el que corresponde a la clásica transformación de Laplace:

$$\varphi(p) = L\{f(t); p\} = \int_0^\infty e^{-pt} (f(t)\, dt, R(p) > 0 \tag{1.2}$$

* Instituto de Mattemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Univ. Nac. de Tucumán (Rep. Argentina).

Los otros núcleos usados comúnmente son $(t+p)^{-\lambda}$, t^{s-1}, $(pt)^{1/2}J_\gamma(pt)$, $(pt)^{1/2}K_\gamma(pt)$, $(pt)^{m-1/2}e^{-1/2pt}W_{k,m}(pt)$ correspondiendo a las conocidas transformadas de Stieltjes, Mellin, Hankel, Meijer y Varma [6] respectivamente. Recientemente algunas transformadas integrales más generales han sido definidas y estudiadas usando como núcleo funciones especiales generalizadas tales como la función G de Meijer [5, pág. 570], función H de Fox's [9, pág. 142] y la función H de dos variables [4, pág. 181].

La técnica de transformadas integrales, la cual ha tenido su origen en trabajos de Heavisides, ha sido muy útil en la solución de ciertos tipos de problemas de contorno de física matemática. En las últimas décadas varias transformadas han sido estudiadas extensivamente proveyéndonos de un número considerable de teoremas y propiedades de las transformadas integrales. El propósito del presente trabajo es establecer ciertos teoremas sobre una transformada integral general:

$$\varphi(p) = T\{f(t);\, p\} = \int_0^\infty K(pt)\, f(t)dt \tag{1.3}$$

En la sección 3 extendemos los resultados al caso donde el núcleo $K(pt)$ es reemplazado por $K(\frac{p}{t})$. Además algunos casos particulares son mencionados.

2. TEOREMAS PARA EL NUCLEO K(pt)

Teorema 1

Si:

$$T\{f(t);\, p\} = \varphi(p)$$

y

$$T\{g(t);\, p\} = \gamma(p)$$

entonces:

$$\int_0^\infty f(t)\, \gamma(t)\, dt = \int_0^\infty g(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2.1}$$

con tal que las transformadas T de $|f(t)|$ y $|g(t)|$ existan y ambas integrales en (2.1) sean absolutamente convergentes.

Prueba: Sabemos por la definición (1.3) que:

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} K(pt)\, f(t)\, dt$$

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} K(pt)\, g(t)\, dt \qquad \text{por lo tanto}$$

$$\int_0^{\infty} f(t)\, \psi(t)\, dt = \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_0^{\infty} K(tu)\, g(u)\, du \right) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} g(u)\, du \left(\int_0^{\infty} K(tu)\, f(t)\, dt \right) = \int_0^{\infty} g(u)\, \varphi(u)\, du$$

El cambio de orden de integración está permitido bajo las hipótesis del teorema, [3, pág. 504].

Este teorema puede ser llamado teorema de Goldstein's generalizado. Si ponemos el núcleo $K(pt) = e^{-pt}$ obtenemos el conocido teorema de Goldstein's [8, pág. 103]. Si consideramos como núcleo $(p+t)^{-\lambda}$, $(pt)^{m-\frac{1}{2}}$ $e^{-\frac{1}{2}pt}W_{k,m}$ (pt) obtenemos los correspondientes teoremas para la transformada de Stieltjes dado por Saxena [15, pág. 340] y para la transformada de Varma dado por Rathie [14, pág. 340].

Por un camino similar podemos establecer los siguientes teoremas:

Teorema 2

Si:

$$T\{f(t);\, p\} = \int_0^{\infty} k(pt)\, f(t)\, dt$$

entonces:

$$T\left\{f(at);\, p\right\} = \frac{1}{a}\, T\left\{f(t);\, \frac{p}{a}\right\} \tag{2.2}$$

con tal que la transformada T de $|f(t)|$ exista.

Teorema 3

Si:

$T\{f_j(t);\, p\} = \int K(pt)\, f_j(t)\, dt \qquad (j = 1,2,\ldots,\gamma)$

entonces para arbitrarios multiplicadores Δ_1, Δ_2, ..., Δ_γ se tiene:

$$\sum_{j=1}^{\gamma} \Delta_j\, T\{f_j(t);\, p\} = \sum_{j=1}^{\gamma} T\{\Delta_j f_j(t);\, p\} \tag{2.3}$$

con tal que las transformadas T de las funciones $|f_j(t)|$ existan.

El siguiente teorema nos da una relación que existe enttre la ttransformada integral general definida por (1.3) y la transformada de Varma [16, pág. 209].

$$V_{k,m}\{f(t); p\} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}pt} (pt)^{m\frac{1}{2}} W_{k,m}(pt)\, f(t)\, dt \qquad (2.4)$$

Teorema 4

Si:

$$T\{f(t); s\} = \int_0^\infty K(st)\, f(t)\, dt$$

entonces:

$$V_{k,m}\{g(x)\, T\{f(t); sx\}; p\} =$$

$$\int_0^\infty f(t)\, V_{k,m}\{g(x)\,.\, K(sxt); p\}\, dt \qquad (2.5)$$

con tal que la transformada T de $|f(t)|$ exista, $g(x) = 0(x^{\xi})$ y $K(x) = 0(x^{\gamma})$ para x pequeñoñ $g(x) = 0(x^{\eta}\, e^{-\beta x})$ y $k(x) = (x^{s}\, e^{-\alpha x})$ para x grande, $R\,\{\xi+\gamma+m+1\pm m\} > 0$, $\{\eta+\varsigma+m+k+1\} < 0$, $R\,(\alpha+\beta+p) > 0$. y la integral resultante sea absolutamente convergente.

Prueba:

Teniendo en cuenta (2.4) y (1.3)

$$V_{k,m}\{g(x)\,.\,T\{f(t); sx\}; p\} =$$

$$= \int_0^\infty (px)^{m-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{p}{2}}\, W_{k,m}(px)\, g(x)\, \left(\int_0^\infty f(t)\, K(sxt)\, dt\right) dx$$

$$\int_0^\infty f(t)\, V_{k,m}\{g(x)\,.\, K(sxt); p\}\, dt.$$

El cambio de orden de integración esté permitido [3, pág. 504] de acuerdo a las hipótesis dadas.

Poniendo como núcleo en (1.3) la función H de Fox's de una variable [7, pág. 395] y la función H de dos variables [12, pág. 68] entonces llegamos a los resultados obtenidos recientemente por Battig [2] y Anguio y Kalla [1] respectivamente.

Si en la transformada T consideramos como núcleo la función H de Fox's de una variable y la función $g(x) = 1$ obtenemos el siguiente resultado:

$$V_{k,m}\{ T\{f(t); sx\}; p\} =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, H^{m,\, n+2}_{q+1,\, p+2} \left(\frac{st}{p} \middle| \begin{matrix} (-2m, 1); (0, 1), \{(a_p, {}_p)\} \\ \{(b_q, {}_q)\}, (-\tfrac{1}{2}+k-m, 1) \end{matrix} \right) dt$$

con tal que la transformada T de $|f(t)|$ exista,

$$R\left\{ \frac{b_j}{B_j} + m \pm m + 1 \right\} > 0 \qquad (j = 1, \ldots m),$$

$$R\left\{ \frac{a_i - 1}{\alpha_i} + k + m + \tfrac{1}{2} \right\} < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad Re(p) > 0$$

y la integral resultante su absoluta convergente.

3. TEOREMAS PARA EL NUCLEO $K(\frac{p}{t})$

Nosotros podemos extender fácilmente los resultados de la sección anterior a la transformada integral cuyo núcleo es de la forma $K(\frac{p}{t})$

$$V\ \{f(t); p\} = \int_0^\infty K(\frac{p}{t})\, f(t)\, dt. \tag{3.1}$$

mediante teoremas análogos a los de la sección anterior.

Teorema 1

Si:

$$V\{f(t);\, p\} = \varphi(p)$$

y

$$V\{g(t);\, p\} = \psi(p)$$

entonces:

$$\int_0^\infty f(t)\, \psi\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^\infty g(t)\, \varphi\left(\frac{1}{t}\right) dt. \tag{3.2}$$

con tal que las transformadas V de $|f(t)|$ y $|g(t)|$ existan y ambas integrales en (3.2) sean absolutamente convergentes.

Si ponemos como núcleo $\dfrac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)}{p.\,\Gamma(\gamma)}\, {}_2F_1\left(\dfrac{\lambda,\,\mu}{\gamma};\; \dfrac{t}{p}\right)$ entonces este teorema se reduce al dado anteriormente por Rajengra Swaroop [12, pág. 112] para la transformada hipergeométrica de Gauss.

Teorema 2

Si:

$$V\{f(t);\, p\} = \int_0^\infty K\left(\frac{p}{t}\right) f(t)\, dt$$

entonces

$$V\{f(at);\, p\} = \frac{1}{a}\, V\{f(t);\, ap\}. \tag{3.3}$$

donde a es una constante y la transformada V de $|f(t)|$ existe.

Teorema 3

Si:

$$V\{f_j(t);\, p\} = \int_0^\infty K\left(\frac{p}{t}\right) f_j(t)\, dt$$

$j = 1, 2, \ldots,$; entonces para arbitrarios multiplicadores $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\gamma$ se tiene:

$$\sum_{j=1}^{\gamma} \Delta_j\, V\{f_j(t);\, p\} = \sum_{j=1}^{\gamma} V\{\Delta_j f_j(t);\, p\} \tag{3.4}$$

con tal que las transformadas V de las funciones $|f_j(t)|$ existan.

Teorema 4

Si:

$$V\,\{f(t); s\} = \int_0^\infty K\left(\frac{s}{t}\right) f(t)\, dt$$

entonces

$$V_{k,m}\,\{g(x)\,.\,V\,\{f(t); \frac{s}{t}\}; p\} =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, V_{k,m}\,\{g(x)\,.\,K\left(\frac{s}{xt}\right); p\}\, dt \tag{3.5}$$

con tal que la transformada V de $f(t)$ exista, $g(x) = 0(x)^{\xi}$ y $K\left(\frac{s}{x}\right) = 0(x^{\delta}\,.\,e^{-\alpha x})$ para x pequeño, $g(x) = 0(x^{\eta}\, e^{-\beta x})$ y $K\left(\frac{s}{x}\right) = 0(x^{\gamma})$ para x grande, $R\,\{\xi + \delta + m + 1 \pm m\} > 0$, $R\,(\eta + \gamma + m + k + \tfrac{1}{2}) < 0$, $R\,(p+\alpha+\beta) > 0$, y la integral resultante sea absolutamente convergente.

Si en la transformada V consideramos como núcleo la función H de Fox's de una variable y la función $g(x) = 1$ obtenemos el siguiente resultado.

$$V_{k,m}\,\{\,V\,\{f(t); \frac{s}{x}\}; p\} =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\; H^{m+2,\,n}_{q+2,\,p+1}\left(\frac{ps}{t}\,\middle|\,\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}, (\frac{3}{2} - k + m, 1)\\ (1 + 2m, 1), (1, 1), \{b_p, \beta_p)\}\end{matrix}\right)$$

dt

con tal que la transformada V de $|f(t)|$ exista,

$$R\left\{\frac{a_i - 1}{\alpha_i} + m \pm m + 1\right\} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$R\left\{\frac{b_j}{j} + k + m + \tfrac{1}{2}\right\} < 0 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$R_e(p) > 0$, y la integral resultante sea absolutamente convergente.

Es convergente puntualizar aquí que los teoremas establecidos en este trabajo pueden ser extendidos a las transformadas integrales de dos variables.

REFERENCIAS

1. ANGUIO, M. E. F. DE Y KALLA, S. L. A Study of generalized. Integral transform.
2. BATTIG, N. E. F. DE. Algunos teoremas sobre transformadas generalizadas. Univ. Nac. de Tuc. Rev. Serie A.22 (1972).
3. BROMWICH, T. J. I. A. Theory of infinite series Mac Millan, pág. 504.
4. BORA, S. L.; KALLA, S. L. AND SAXENA, R. K. On Integral transforms. Univ. Nac. Tucumán. Rev. Serie A.20 (1970), 181-188.
5. BHISE, V. M. Inversión fórmula for a generalized Laplace integral, J. Vckram. University. India 3 (1959), 57-63.
6. ERDÉLYI, A. Tables of integral transforms. Vol. 2 Mc-Graw-Hill, New York (1954).
7. FOX, C. The G. and H-functions as symmetric Fourier Kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961) 395-429.
8. GOLDSTEIN, S. Operational representation of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function. Proc. London Math. Soc. 34. (1932), 103-125.
9. GUPTA, K. C. Y MITTALL, P. K. The H-function transform, Your Aust. Math. Soc. 11 (1970), p. 142-148
10. KALLA, S. L. A generalized Theorem of integral transform (to-appear).
11. LUKE, Y. L. The Specid function and their approximation, Vol. I, Academic. Press. N. Y. (1969).
12. MUNOT, P. C. AND KALLA, S. L. On an Extension of Generalized Function of two variables. Univ. Nac. de Tucumán. Rev. Serie A.21 (1971), p. 68-84.
13. RANJENDRA, SWARROP. On a generalization of the Laplace and the Stieltjes transformations. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Serie I.78 (1964), 105-112.
14. RATHIE, C. B. A few Theorems on generalized Laplace transform. Proc. Nat. Inst. Sci. India 28 (1953), 65-74.
15. SAXENA, R. K. A Study of the generalized Stieltjes transform. Proc. Nac. Inst. Sci. India 25 (1959), 340-355.
16. VARMA, R. S. On a generalization of Laplace integral. Proc. Nac. Acad. Sci. India 20 (1951), 209-216.