EFECTOS DE LOS GRADIENTES DE TEMPERATURA EN EL FLUJO HELICOIDAL DE CRISTALES LIQUIDOS COLESTERICOS INCOMPRENSIBLES ENTRE DOS CILINDROS CIRCULARES COAXIALES QUE TIENEN VELOCIDADES ROTACIONAL Y AXIAL

Por Dr. A. K. SHARMA
Departament of Matematics and Statistics,
G. B. Pant University of Agriculture and Technology,
Pantnagar (District Nainital), U. P., INDIA

Resumen

El trabajo se refiere, a los efectos de tres gradientes de temperatura diferentes que actúan en tres dimensiones perpendiculares a un flujo de cristal líquido colestérico incomprensible, con un director de magnitud unitaria entre cilindros circulares coaxiales, que giran con velocidades angulares distintas sobre un eje común, y que se mueven a velocidades axiales diferentes según sus ejes. Para bajo corte y los gradientes de temperatura de las tres dimensiones, se han obtenido las componentes de velocidad no nulas, la orientación de las moléculas y la distribución de la temperatura entre los dos cilindros, y se han discutido los casos particulares de este problema. Se encuentra que los gradientes de temperatura han influido la velocidad así como la orientación de las moléculas, que depende en último caso de varias formas de la función del radio vector.

1. *Introducción*

La teoría de cristal líquido incomprensible colestérico con director de magnitud unidad [1] con las partes de equilibrio de sus ecuaciones constituyentes [2] y con la forma de Helmholtz para función de energía [3] ha sido tratado por Sharma [4] para problemas de flujo líquido colestérico en varias situaciones. Recientemente Paria y Sharma [5] también han examinado el efecto de un campo magnético en el flujo helicoidal. En este trabajo analizaremos los efectos de tres gradientes de temperatura que actúan en direcciones angular axial y radial sobre cilindros circulares, sobre el flujo helicoidal considerado por Paria y Sharma [6] en otro lugar.

2. *Ecuaciones fundamentales*

Las ecuaciones para el flujo de cristales de líquidos incomprencibles colestéricos con director $\vec{d}$ de magnitud unidad [1] son

$$\vartheta_{i,i} = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{D\vartheta_i}{Dt} = \rho F_i + \sigma_{ji,j} \tag{2.2}$$

$$\rho_1\frac{D^2 d_i}{Dt^2} = \rho_1 G_i + g_i + \pi_{ji,j} \tag{2.3}$$

$$\rho\frac{DU}{Dt} = \rho Q - q_{i,i} + \sigma_{ji}A_{ij} + \pi_{ji}N_{ij} - g_i N_i, \tag{2.4}$$

donde

$$A_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\vartheta_{i,j} + \vartheta_{j,i}),$$

$$W_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\vartheta_{i,j} - \vartheta_{j,i}),$$

$$N_i = \frac{Dd_i}{Dt} + W_{ki}d_k,$$

$$N_{ij} = \left(\frac{Dd_i}{Dt}\right)_{,j} + W_{ki}d_{k,j}. \tag{2.5}$$

Aquí $\vec{V}$, ρ, F_i, σ_{gi}, ρ_1, G_i, g_i, π_{ji}, U, Q, $\vec{q}$ y $\frac{D}{Dt}$ indican respectivamente

la velocidad vectorial, la densidad uniforme, la fuerza en el elemento por unidad de masa, el tensor de tensiones, la constante de inercia, la fuerza intrínseca en el elemento por unidad de volumen, el tensor director de tensiones, la energía interna por unidad de masa, el calor suministrado por unidad de masa, el vector de flujo de calor y la derivada con respecto al tiempo respectivamente.

El tensor de tensiones, el tensor director de tensiones π y la fuerza intrínseca directriz g_i están dado por las ecuación constitutiva [1]

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial d_{k,j}} d_{k,i} + \alpha\, e_{jkp}\, (d_p\, d_i)_{,k} + \tilde{\sigma}_{ji}, \tag{2.6}$$

$$\pi_{ji} = \beta_j d_i + \rho \frac{\partial F}{\partial d_{i,j}} + \alpha\, e_{ijk}\, d_k, \tag{2.7}$$

$$g_i = \nu\, d_i - \beta_j\, d_{i,j} - \rho \frac{\partial F}{\partial d_i} - \alpha\, e_{ijk}\, d_{k,j} + \tilde{g}_i \tag{2.8}$$

Donde p, F, α, $\vec{\beta}$ γ, $\tilde{\sigma}_{ji}$ y $\tilde{g}_i$ se usan para designar la presión, la energía de Helmholtz por unidad de masa, un coeficiente de material, un vector arbitrario, el director de tensión, la parte no equilibrada de la tensión adicional y el director de la fuerza intrínseca del elemento respectivamente. Además, $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{g}_i$ y q_i están dados en [2]

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ji} = {} & \mu_1\, d_k\, d_p\, A_{kp}\, d_i\, d_j + \mu_2\, N_i\, d_j + \mu_3\, N_j\, d_i \\ & + \mu_4\, A_{ij} + \mu_5\, A_{ik}\, d_k\, d_j + \mu_6\, A_{jk}\, d_k\, d_i \\ & + \mu_7\, e_{ipq}\, d_p\, T_{,q}\, d_j + \mu_8\, e_{jpq}\, d_p\, T_{,q}\, d_i; \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\tilde{g}_i = \lambda_1\, N_i + \lambda_2\, A_{ik}\, d_k + \lambda_3\, e_{ipq}\, d_p\, T_{,q}; \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} q_i = {} & K_1\, T_{,i} + K_2\, d_k\, T_{,k}\, d_i + K_3\, e_{ipq}\, d_p\, N_q \\ & + K_4\, e_{ipq}\, d_p\, A_{qk}\, d_k; \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde μ_i, λ_i, y K_i son coheficientes del material. Los coheficientes del material μ_i, λ_i satisfacen las relaciones siguientes para dar un sistema de ecuaciones básicas.

$$\lambda_1 = \mu_2 - \mu_3,\ \lambda_2 = \mu_5 - \mu_6,\ \lambda_3 = \mu_7 - \mu_8. \tag{2.12}$$

La fórmula de la energía libre de Helmholtz para los cristales líquidos colestéricos, propuesta por Frank [3] es

$$\begin{aligned} 2\rho F = {} & \alpha_1\, (d_{i,i})^2 + \alpha_2\, (\tau + d_i\, e_{ijk}\, d_{k,j})^2 \\ & + \alpha_3\, d_i d_j\, d_{k,i}\, d_{k,j} \\ & + (\alpha_2 + \alpha_4)\, [d_{i,j}\, d_{j,i} - (d_{i,i})^2], \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde α_i y τ son coeficientes del material.

En el problema presente tomaremos todos los coeficientes del material como constantes.

3. *Establecimiento del problema*

Ahora consideremos el flujo helicoidal de cristales de líquido incomprensible con director de magnitud unidad entre dos cilindros circulares coaxiales infinitos. Los cilindros tienen velocidades axiales y angulares diferentes con respecto a sus ejes comunes y se mantienen a diferentes temperaturas.

Elegimos el sistema de coordenadas cilíndricas tales que el eje X coincida con el eje común de los cilindros. El cilindro interior y el exterior de radios r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$) tienen $\sim_1$ y $\sim_2$ como velocidades radiales respectivamente y U_1 y U_2 son sus velocidades radiales correspondientes. Los dos cilindros se conservan a las temperaturas T_1 y T_2 respectivamente. El director también tiene la misma orientación en los dos cilindros.

Para examinar el efecto de las tres gradientes de temperaturas en el flujo helicoidal de cristales de líquido incomprensible, examinamos la solución de las ecuaciones diferenciales (2.1) - (2.4) en la forma siguiente.

$$v_r = 0,\ v_\theta = r\,\omega(r),\ v_z = u(r),$$

$$d_r = \sin\varphi(r),\ d_\theta = \cos\varphi(r)\sin\psi(r),\ d_z = \cos\varphi(r)\cos\psi(r),$$

$$T = a\,\theta + bz + f(r), \tag{3.1}$$

donde a y b son distintos gradientes constantes de temperatura en las direcciones θ y Z respectivamente.

Las condiciones de borde para la velocidad, la orientación de las moléculas y la temperatura respectivamente en los dos cilindros son luego.

$$\begin{aligned} &\omega = \sim_1,\quad u = U_1, && \text{at } r = r_1 \\ &\omega = \sim_2,\quad u = U_2, && \text{at } r = r_2 \\ &\omega = 0,\quad \psi = \varphi_0, && \text{at } r = r_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

(φ_0, una constante)

$$\varphi = 0,\quad \psi = \varphi_0, \qquad \text{at } r = r_2 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &f = T_1, && \text{at } r = r_1 \\ &f = T_2. && \text{at } r = r_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

4. *Formulación de las Ecuaciones Diferenciales*

Las velocidades componentes dadas por (3.1) satisfacen claramente la ecuación de continuidad (2.1).

Si no existen las fuerzas del elemento F_i, G_i ni las fuentes de calor, las ecuaciones (2.2) - (2.4) toman la forma siguiente.

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \rho r^2\omega^2 = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_{r\theta}) + \sigma_{\theta r} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_{rz}) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}(r\ \pi_{rr}) - \pi_{\theta\theta}\right] + g_r + \rho_1\,\omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}(r\ \pi_{r\theta}) + \pi_{\theta r}\right] + g_\theta\,\rho_1\,\omega^2 \cos\varphi\,\sin\psi = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\pi_{rz}) + g_z = 0, \tag{4.6}$$

$$(\tilde{\sigma}_{zr} + \tilde{\sigma}_{rz})\,\xi + (\tilde{\sigma}_{\theta r} + \tilde{\sigma}_{r\theta})\,\eta - \tilde{g}_r \cos\varphi\,(\xi\cos\psi + \eta\sin\psi)$$

$$+ \sin\varphi\,(\tilde{g}_z\,\xi + \tilde{g}_\theta\,\eta) - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,q_r) = 0, \tag{4.7}$$

donde hemos usado (2.6), (2.8), (2.13), (3.1) y

$$\xi = \tfrac{1}{2}\frac{du}{dr},\ \eta = \tfrac{1}{2}\,r\frac{d\omega}{dr}.$$

Usando (2.6) y (4.1) y luego integrando, obtenemos

$$p = p_0 + \left[\int_{r_1}^{r} \rho r\omega^2 + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}\right] dr \tag{4.8}$$

donde ρ_0 es la presión del cilindro interior y

$\sigma_{rr} = p + \sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta} = p + \sigma_{\theta\theta}$

Ahora, sustituyendo los valores de $\sigma_{r\theta}$ y $\sigma_{\theta r}$ de (2.6), (2.9), (2.13) en las ecuaciones (4.2), obtenemos

$$G_1\,(\varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta)$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,[r_2\,H_2(\varphi)\sin\psi\cos\psi\,\xi + r^2\,\{H_1(\varphi) + H_2(\varphi)\sin^2\psi\}\eta$$

$$+ r^2\,H_3(\varphi)\cos\psi\,\zeta - ar\,H_5(\varphi)\sin\psi\cos\psi -$$

$$- br^2\,\{H_4(\varphi) - H_5(\varphi)\sin^2\psi\}] = 0, \qquad (4.9)$$

donde

$$\zeta = \frac{df}{dr},$$

$$H_1(\varphi) = \mu_4 + (\mu_5 - \mu_2)\sin^2\varphi,$$

$$H_2(\varphi) = \cos^2\varphi\,(2\mu_1\sin^2\varphi + \mu_3 + \mu_6),$$

$$H_3(\varphi) = \mu_7\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$H_4(\varphi) = \mu_7\sin^2\varphi,$$

$$H_5(\varphi) = \mu_8\cos^2\varphi,$$

$$F_1(\varphi) = \alpha_1\cos^2\varphi + \alpha_3\sin^2\varphi,$$

$$F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\,(\alpha_2\cos^2\varphi + \alpha_3\sin^2\varphi),$$

$$G_1\,(\varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta)$$

$$= \sin\psi\left[F_1(\varphi)\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}F_1(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right.$$

$$- \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}F_2(\varphi)\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{r}F_1(\varphi)\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\sin\psi\cos\psi\frac{d}{d\varphi}F_2(\varphi)\frac{d\psi}{dr}$$

$$- \frac{2\alpha_3}{r}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{2r^2}\frac{d}{d\varphi}F_1(\varphi)$$

$$- \frac{1}{4r^2} \cos^2\psi \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) - \frac{\alpha_3}{2r^2} \sin\varphi \cos\varphi \cos^2\psi$$

$$+ 2\alpha_2 \tau \sin\varphi \cos\varphi \frac{d\psi}{dr} \Bigg]$$

$$- \tan\varphi \cos\psi \Bigg[F_2(\varphi) \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \sin\psi \cos\psi \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\varphi}{dr}$$

$$+ \frac{2\alpha_3}{r} \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} F_2(\varphi) \frac{d\psi}{dr}$$

$$+ \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} - 2\alpha_2 \tau \sin\varphi \cos\varphi \frac{d\varphi}{dr} \Bigg]$$

$$+ (\lambda_1 + \lambda_2) (\xi \cos\psi + \sin\psi) \cos^2\varphi \sin\varphi$$

$$+ (\lambda_1 - \lambda_2) \eta \sin^2\psi$$

$$+ \lambda_3 (b \sin^2\varphi + b \cos^2\varphi \sin^2\varphi - \frac{a}{r} \cos^2\varphi \sin\psi \cos\psi$$

$$- \zeta \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi). \qquad (4.10)$$

Colocando los valores π_{rr}, $\pi_{\theta\theta}$, $\pi_{r\theta}$, $\pi_{\theta r}$, π_{rz}, g_r, g_θ, g_z de (2.7), (2.8), (2.10), (2.13), en las ecuaciones (4.4) a (4.6) y luego eliminando y entre las tres ecuaciones obtenemos.

$$G_1 (\varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad (4.11)$$

$$G_2 \varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta) + \rho_1 \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi = 0, \qquad (4.12)$$

donde

$$G_2 (\varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta) =$$

$$\cos\psi \Bigg[F_1(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \tfrac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} F_1(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{r} F_1(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \sin\psi \cos\psi \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{2r^2} \frac{d}{d\varphi} F_1(\varphi)$$

$$- \frac{1}{4r^2} \sin^2\psi \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) - \frac{2\alpha_3}{r} \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi \frac{d\psi}{dr}$$

$$- \frac{\alpha_3}{r^2} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{\alpha_3}{2r^2} \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\psi$$

$$+ 2\alpha \tau \sin\varphi \cos\varphi \frac{d\psi}{dr} \Bigg]$$

$$+ \tan\varphi \sin\psi \Bigg[F_2(\varphi) \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr}$$

$$+ \frac{1}{r} \sin\psi \cos\psi \frac{d}{d\varphi} F_2(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2\alpha_3}{r} \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi \frac{d\varphi}{dr}$$

$$+ \frac{1}{r} F_2(\varphi) \frac{d\psi}{dr} - 2\alpha_2 \tau \sin\varphi \cos\varphi \frac{d\varphi}{dr} + \frac{2\alpha_2\tau}{r} \cos^2\varphi \Bigg]$$

$$+ (\lambda_1 + \lambda_2) (\xi \cos\psi + \eta \sin\psi) \cos^2\varphi \cos\psi + (\lambda_1 - \lambda_2) \xi \sin^2\varphi$$

$$+ \lambda_3 (b \cos^2\varphi \sin\psi \cos\psi - \frac{a}{r} \cos^2\varphi \cos^2\psi - \frac{a}{r} \sin^2\varphi +$$

$$+ \zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi). \qquad (4.13)$$

Usando (4.11) en (4.9) y luego integrando, obtenemos

$$H_2(\varphi) \sin\psi \cos\psi\, \xi + \{H_1(\varphi) + H_2(\varphi) \sin^2\psi\} \eta + H_3(\varphi) \cos\psi\, \zeta$$

$$- \frac{a}{r} H_5(\varphi) \sin\psi \cos\psi - b \{H_4(\varphi) - H_5(\varphi) \sin^2\psi\}$$

$$= \frac{l}{r^2}, \qquad (4.14)$$

donde l es la constante de integración.

También, integrando (4.3) y luego sustituyendo el valor de σ_{rz} de (2.6), (2.9), (2.13), obtenemos

$$\{H_1(\varphi) + H_2(\varphi) \cos^2\psi\} \xi + H_2(\varphi) \sin\psi \cos\psi\, \eta - H_3(\varphi) \sin\psi\, \zeta$$

$$+ \frac{a}{r} \{H_4(\varphi) - H_5(\varphi) \cos^2\psi\} + b\, H_5(\varphi) \sin\psi \cos\psi$$

$$= \frac{k}{r}, \tag{4.15}$$

donde K es la constante de integración.

Los primeros ocho términos de la ecuación (4.7) que representan calor viscoso pueden ser despreciados [2] en comparación con el último término, para valores pequeños de a, b, ya que los primeros términos son cuadráticos en ξ, η, ζ en tanto que el último término es lineal en esos valores. Integrando obtenemos

$$rq_r = m \tag{4.16}$$

ó

$$K_1(\varphi)\, \zeta + K_2(\varphi)\, (\eta \cos\psi - \xi \sin\psi) + K_3(\varphi) \left(\frac{a}{r} \sin\psi + b \cos\psi\right)$$

$$= \frac{m}{r} \tag{4.17}$$

usando (2.11).

Aquí

$$K_1(\varphi) = K_1 + K_2 \sin^2\varphi,$$

$$K_2(\varphi) = (K_3 - K_4) \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$K_3(\varphi) = K_2 \sin\varphi \cos\varphi, \tag{4.18}$$

y m es una constante de integración.

Ahora, resolviendo las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.17) de ξ, η y ζ, obtenemos

$$\xi = \frac{k}{r} \{G_1(\varphi) + G_2(\varphi) \sin^2\psi\} -$$

$$- \frac{1}{r^2} G_2(\varphi) \sin\psi \cos\psi + \frac{m}{r} G_3(\varphi) \sin\psi$$

$$+ \frac{a}{r} \{G_4(\varphi) \cos^2\psi - G_5(\varphi) \sin^2\psi\} -$$

$$- b \sin\psi \cos\psi \{G_4(\varphi) + G_5(\varphi)\}, \tag{4.19}$$

$$\eta = \frac{1}{r^2} \{G_6(\varphi) - G_2(\varphi) \sin^2\psi\} - \frac{k}{r} G_2(\varphi) \sin\psi \cos\psi$$

$$- \frac{m}{r} G_3(\varphi) \cos\psi + \frac{a}{r} \sin\psi \cos\psi \{G_4(\varphi) + G_5(\varphi)\}$$

$$+ b \{G_5(\varphi) \cos^2\psi - G_4(\varphi) \sin^2\psi\}, \tag{4.20}$$

$$\zeta = \frac{1}{r} (k \sin\psi - \frac{l}{r} \cos\psi) G_7(\varphi) + \frac{m}{r} G_8(\varphi)$$

$$- (b \cos\psi + \frac{a}{r} \sin\psi) G_9(\varphi). \tag{4.21}$$

Donde

$$G_1(\varphi) = \frac{1}{\{H_1(\varphi) + H_2(\varphi)\}},$$

$$G_2(\varphi) = \frac{\{K_1(\varphi) H_2(\varphi) + K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}}{\{H_1(\varphi) + H_2(\varphi)\}\{K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}},$$

$$G_3(\varphi) = \frac{H_3(\varphi)}{\{K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}},$$

$$G_4(\varphi) = \frac{\{H_5(\varphi) - H_4(\varphi)\}}{\{H_1(\varphi) + H_2(\varphi)\}},$$

$$G_5(\varphi) = \frac{\{K_1(\varphi) H_4(\varphi) + K_3(\varphi) H_3(\varphi)\}}{\{K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}},$$

$$G_6(\varphi) = \frac{K_1(\varphi)}{\{K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}},$$

$$G_7(\varphi) = \frac{K_2(\varphi)}{\{K_1(\varphi) H_1(\varphi) - K_2(\varphi) H_3(\varphi)\}},$$

$$G_8(\varphi) = \frac{H_1(\varphi)}{\{K_1(\varphi)\ H_1(\varphi) - K_2(\varphi)\ H_3(\varphi)\}},$$

$$G_9(\varphi) = \frac{\{K_3(\varphi)\ H_1(\varphi) + K_2(\varphi)\ H_4(\varphi)\}}{\{K_1(\varphi)\ H_1(\varphi) - K_2(\varphi)\ H_3(\varphi)\}}, \qquad (4.22)$$

Algunas simplificaciones trigonométricas entre (4.11) y (4.12) dan

$$2F_1(\varphi)\left\{\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right\} + \frac{d}{d\varphi}F_1(\varphi)\left\{\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\}$$

$$- \frac{d}{d\varphi}F_2(\varphi)\left\{\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\sin\psi\ \cos\psi\right\}^2$$

$$+ \sin^2\bar{\varphi}\left[\left(2\alpha_2\tau - \frac{\alpha_3}{r}\sin^2\psi\right)\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\right.$$

$$\left.\left\{\alpha_2\tau\ \sin^2\psi - \frac{\alpha_3}{r}(1 + \sin^2\psi)\cos^2\psi\right\}\right]$$

$$+ 2(\lambda_1 + \lambda_2\cos^2\varphi)(\xi\cos\psi + \eta\sin\psi) + \lambda_3\left(b\sin\psi - \frac{a}{r}\cos\psi\right)$$

$$+ \rho_1\omega^2\sin^2\varphi\cos^2\psi = 0, \qquad (4.23)$$

$$F_2(\varphi)\left\{\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right\} + \frac{d}{d\varphi}F_2(\varphi)\frac{d\varphi}{dr}\frac{d\psi}{dr}$$

$$+ \frac{1}{r}\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{dr}\cot\varphi\cos^2\psi\right)$$

$$\left\{\frac{d}{d\varphi}F_2(\varphi) + 2\alpha_3\sin\varphi\cos\varphi\right\}$$

$$+ \cos\varphi\left\{\frac{1}{r}\cos\varphi\sin\psi\left(2\alpha_2\tau\sin\psi - \frac{\alpha_3}{r}\cos\psi\right) - 2\alpha_2\tau\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}\right\}$$

$$+ (\lambda_1 - \lambda_2)(\xi\sin\psi - \eta\cos\psi)\sin\varphi\cos\varphi + \lambda_3\zeta\cos^2\varphi$$

$$- \lambda_3\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{a}{r}\sin\psi + b\cos\psi\right)$$

$$+ \rho_1\ \omega^2\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi = 0. \qquad (4.24)$$

5. *Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales para valores bajos de corte y pequeños gradientes de temperatura*

En esta sección examinaremos las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4.19) - (4.21), (4.23), (4.24) a bajo corte con pequeños gradientes de temperatura, en las tres direcciones, omitiendo los términos inerciales (4.23) y (4.24).

Las soluciones son de la forma

$$u(r) = U_1 + k\, u_1(r) + l\, u_2(r) + m\, u_3(r) + a\, u_4(r) + b\, \mu_5(r) + 0\,(k^2, \ldots, kl, \ldots), \tag{5.1}$$

$$\omega(r) = \sim_1 + k\, \omega_1(r) + l\, \omega_2(r) + m\, \omega_3(r) + a\, \omega_4(r) + b\, \omega_5(r) + 0\,(k^2, \ldots, kl, \ldots), \tag{5.2}$$

$$f(r) = T_1 + k\, f_1(r) + l\, f_2(r) + m\, f_3(r) + a\, f_4(r) + b\, f_5(r) + 0\,(k^2, \ldots, kl, \ldots), \tag{5.3}$$

$$\varphi(r) = k\, \varphi_1(r) + l\varphi_2(r) + m\, \varphi_3(r) + a\, \varphi_4(r) + b\, \varphi_5(r) + 0\,(k^2, \ldots, kl, \ldots), \tag{5.4}$$

$$\psi(r) = \psi_0 + k\, \psi_1(r) + l\, \psi_2(r) + m\, \psi_3(r) + a\, \psi_4(r) + b\, \psi_5(r) + 0\,(k^2, \ldots, kl, \ldots), \tag{5.5}$$

donde U_i, ω_i, f_i, φ_i, ψ_i $(i = 1, \ldots, 5)$, k, l, m deben determinarse de (4.19) - (4.21), (4.23), (4.24) usando las condiciones de (3.2) - (3.4).

Luego, puede demostrarse que

$$u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{AC - B^2}\right)\left[AC\,\frac{\log\ (r/r_1)}{\log\ (r_2/r_1)} - B^2\frac{r_2}{r}\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)\right]$$

$$+ (\sim_2 - \sim_1)\left(\frac{AB}{AC - B^2}\right)$$

$$\left[\frac{\log\ (r/r_1)}{\mathrm{lof}\ (r_2/r_1)} - \frac{r_2}{r}\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{(AC - B^2)}\Bigg[(ACG - ABH - ABI - B^2F)\,\frac{\log\ (r/r_1)}{\log\ (r_2/r_1)}$$

$$- G(AC - B^2)\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)$$

$$+ \; B(BG - AH - AI - BF) \frac{r_2}{r} \Bigg] , \tag{5.6}$$

$$\omega = \sim_1 - (U_2 - U_1) \left(\frac{BC}{AC - B^2} \right) \left(\frac{r_1 \; r_2}{r^2} \right) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right)$$

$$+ \left(\frac{\sim_2 - \sim_1}{AC - B^2} \right) \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)$$

$$\left[AC \frac{r_2}{r} \left(\frac{r + r_1}{r_2 + r_1} \right) - B^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{(AC - B^2)} \Bigg[I \, (AC - B^2) \frac{\log \, (r_1/r)}{\log \, (r_1/r_2)}$$

$$+ \; (ACH - BCG + BCF + B^2 I) \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)$$

$$+ \; C \, (BG - AH - AI - BF) \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \Bigg) \tag{5.7}$$

$$f = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\log \, (r/r_1)}{\log \, (r_2/r_1)} , \tag{5.8}$$

$$\varphi = \frac{D}{AC - B^2} \Bigg] (U_2 - U_1) \Bigg\{ C \cos\psi_0 \log \left(\frac{r_1^{\,r_2 - r} \; r_2^{\,r - r_1}}{r^{\,r_2 - r_1}} \right)$$

$$+ \frac{B}{2} \sin\psi_0 \log \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log \left(\frac{r_1}{r}\right) \log \left(\frac{r}{r_2}\right) \Bigg\}$$

$$+ \; (\sim_2 - \sim_1) \Bigg\{ B \cos\psi_0 \log \left(\frac{r_1^{\,r_2 - r} \; r_2^{\,r - r_1}}{r^{\,r_2 - r_1}} \right)$$

$$+ \frac{A}{2} \sin\psi_0 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \log\left(\frac{r}{r_2}\right) \Bigg\}$$

$$+ \Bigg\{ (CG - CF - BH - BI) \cos\psi_0 \log\left(\frac{\dfrac{r_2 - r}{r_1} \; \dfrac{r - r_1}{r_2}}{\dfrac{r_2 - r_1}{r}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} (BG - BF - AH - AI) \sin\psi_0 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \log\left(\frac{r}{r_2}\right) \Bigg\}$$

$$+ J \Bigg[a \cos\psi_0 \log\left(\frac{\dfrac{r_2 - r}{r_1} \; \dfrac{r - r_1}{r_2}}{\dfrac{r_2 - r_1}{r}}\right)$$

$$+ \frac{b}{4} \sin\psi_0 \log\left(\frac{\dfrac{r_2^2 - r^2}{r_1} \; \dfrac{r^2 - r_1^2}{r_2}}{\dfrac{r_2^2 - r_1^2}{r}}\right) \Bigg], \qquad (5.9)$$

$$\psi = \psi_0 + E \Bigg[4\alpha_2\tau \sin\psi_0 \log\left(\frac{\dfrac{r^2 - r}{r_1} \; \dfrac{r - r_1}{r_2}}{\dfrac{r_2 - r_1}{r}}\right)$$

$$- \alpha_3 \cos\psi_0 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \log\left(\frac{r}{r_2}\right) \Bigg]$$

$$- K \log\left(\frac{\dfrac{r^2 - r}{r_1} \; \dfrac{r - r_1}{r_2}}{\dfrac{r_2 - r_1}{r}}\right) . \qquad (5.10)$$

Aquí,

$$A = \left[\frac{2 \{\mu_4 + (\mu_3 + \mu_6) \sin^2\psi_0\}}{\mu_4 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$B = \left[\frac{(\mu_3 + \mu_6) \sin^2\psi_0}{\mu_4 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$C = \left[\frac{\{\mu_4 + (\mu_3 + \mu_6) \cos^2\psi_0\}}{\mu_4 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \right)$$

$$D = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\alpha_1 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6) \log (r_1/r_2)},$$

$$E = \frac{\sin\psi_0}{2 \alpha_2 \log (r_1/r_2)},$$

$$F = \left[\frac{2a \ \mu_8 \ \cos^2\psi_0}{\mu_3 + \mu_4 + \mu_6} \right] \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$G = \left[\frac{b \ \mu_8 \sin 2\psi_0}{\mu_3 + \mu_4 + \mu_6} \right] (r_2 - r_1),$$

$$H = \left[\frac{a \ \mu_8 \sin 2\psi_0}{\mu_3 + \mu_4 + \mu_6} \right] \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$I = \left[\frac{2b \ {}_8\mu \ \sin^2{}_0\psi}{\mu_3 + \mu_4 + \mu_6} \right] \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

$$J = \left[\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) \mu_8 - \lambda_3 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)}{2\alpha_1 (\mu_3 + \mu_4 + \mu_6)} \right] \frac{1}{\log (r_1/r_2)},$$

$$K = \frac{\lambda_3 \ (T_2 - T_1)}{\alpha_2 \{\log \ (r_2/r_1\}^2}, \qquad (5.11)$$

Por lo tanto de (3.1) y (5.8) se deduce que

$$T = a\theta + bz + T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\log \ (r/r_1)}{\log \ (r_2/r_1)}. \qquad (5.12)$$

Los tres últimos términos de la ecuación (5.6) los cuales representan el efecto de los gradientes de temperatura en direcciones radial y axial de los cilindros, sobre la velocidad axial en un punto, se encuentra varían linealmente, inversa y logarítmicamente con la dirección radial. Además esos dos gradientes de temperatura también influyen en la velocidad angular en un punto, y la influencia dada por los tres últimos términos de (5.7) varían como la inversa, el cuadrado inverso y el logaritmo del radio vector. También sus efectos en φ dados por los cuatro últimos términos de (5.9) están en función del radio vector, logaritmo del radio vector y de sus cuadrados respectivos. Finalmente la función ψ está influenciada por el radial del gradiente de temperatura sólo, y su efecto en ψ está dado por el último término de (5.10), variando linealmente y logarítmicamente con la dirección radial.

6. *Casos particulares*

En esta sección consideraremos los tres siguientes casos en los cuales uno o dos de los tres gradientes de temperatura a, b, $\frac{df}{dr}$ son cero en (3.1) y el restante existente en el flujo helicoidal.

Cuando los gradientes de temperatura en las direcciones axial y radial de los cilindros por ejemplo b, $\frac{df}{dr}$ son cero en (3.1) y la temperatura T varía linealmente sólo en la dirección angular, luego la condición $\frac{df}{dr} = 0$ implica por (5.8) que $T_2 = T_1$. También la temperatura T dada por (3.1) toma ahora la forma $T = T_1 + a\theta$ usando (5.8). Así los términos que contienen las constantes b, G, I, K desaparecen en las ecuaciones (5.6), (5.7), (5.9), (5.10) como resultado de (5.11).

Cuando los gradientes de temperatura angular y radial por ejemplo a, $\frac{df}{dr}$ son cero en (3.1) y la temperatura varía linealmente sólo en dirección axial, luego como arriba $\frac{df}{dr} = 0$, da que $T_2 = T_1$. Luego (3.1) toma la forma de $T = T_1 + bz$, y los términos que contienen las constantes a, F, H, K desaparecen de las ecuaciones (5.6), (5.7), (5.9), (5.10), resulta de (5.11).

Cuando el gradiente de temperatura angular y axial por ejemplo a, b, son cero en (3.1) entonces nuestro problema conduce al problema considerado por Sharma [7].

7. *Conclusión*

Para bajo corte y gradiente de temperatura pequeños en las direcciones angular axial y radial hemos obtenido las expresiones (5.6), (5.7) para la distribución de velocidades (5.9), (5.10), para la orientación de moléculas (5.12) para determinar la temperatura en cualquier punto entre los dos cilindros. Como ya se dijo la forma general de temperatura (3.1) influencia ambas componentes de velocidad así como la orientación de las moléculas y depende de varias funciones del radio vector. La temperatura en un punto (5.12) se encuentra variando logarítmicamente en dirección radial. El efecto de temperatura sobre la presión en un punto puede sin embargo calcularse según (4.8).

Reconocimiento

Doy las gracias al Dr. S. K. Sharma, profesor y jefe del departamento de Matemáticas y Estadísticas C.B.S. y H. Pantnagar por el estímulo y discusiones.

REFERENCIAS

1. LESLIE, F. M. 'Some Thermal effects in cholesteric liquid crystals'. [Proc. Roy. Soc. A *307*, 359-372 (1968)].

2. LESLIE, F. M. 'Thermo-mechanical coupling in cholesteric liquid crystals'. [Symposium of the Chemical Society, Faraday Division, *5*, 33-40 (1971)].

3. FRANK, F. C. 'On the theory of liquid crystals'. [Discussions Faraday Society *25*, 19-28 (1958)].

4. (i) SHARMA, A. K. 'Flow of cholesteric liquid crystal over a plate due to temperature gradients'. [University of Indore, Research Journal (Science) Vol. III, Nº 2, pp. 13-16, July, 1975].
(ii) SHARMA, A. K. 'Flow of cholesteric liquid crystal between two parallel plates'. [Indian Journal of Theoretical Physics Vol. 25, Nº 2, pp. 65-72, June, 1977].
(iii) SHARMA, A. K. 'Flow of cholesteric liquid crystal between two parallel plates in magnetic field'. [Indian Journal of Mechanics and Mathematics, Vol. 13, pp. 46-53, 1975].

5. Paria, G. and Sharma, A. K. 'Effect of Static magnetic field on the helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities'. [Journal of Australian Mathematical Society, Series B, Appl. Maths., Vol. XIX (3), pp. 371-380 (1976)].

6. Paria, G. and Sharma, A. K. 'Helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial circular cylinders having rotational and axial velocities'. [To appear in Bulletin Mathematique (ROMANIA)].

7. Sharma, A. K. 'Helical flow of incompressible cholesteric liquid crystal between two coaxial hot circular cylinders having rotational and axial velocities'. [Ph. D. Thesis accepted by Indore University, (1977)].