EVALUACION DE INTEGRALES FINITAS QUE CONTIENEN LA FUNCION -M DE DOS VARIABLES USANDO EL OPERADOR E

Por R. R. MAHAJAN y RAJENDRA K. SAXENA

RESUMEN:

En este trabajo hemos evaluado dos integrales de finitas que encierrar el producto de la función *M* y de la función hipergeométrica generalizada Las integrales se evaluarán usando el operador E de diferencia finita.

(2) INTRODUCCION:- La función M de dos variables que aparece er este trabajo se debe a D. P. Mourya (5). Se define y representa como sigue:

(2.1)

$$M(x, y) = M\left[\begin{array}{c} \left[\begin{matrix} m_1, & n_1 \\ p_1-m_1, & q_1-n_1 \end{matrix}\right] \\ \left|\begin{matrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2 \end{matrix}\right| \\ \left|\begin{matrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3 \end{matrix}\right| \end{array}\left|\begin{array}{l} \{(a_{p_1};\ \alpha_{p_1},\ \alpha_{p_1})\};\ \{(b_{q_1};\ \beta_{q_1},\ \beta_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\};\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3},\ \epsilon_{p_3})\};\ \{(f_{q_3},\ \rho_{q_3})\} \end{array}\right|\begin{array}{c} x \\ \\ y \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi 1)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} m(\xi, \eta)\, x^{\xi} \cdot y^{\eta}\, d\xi \cdot d\eta$$

donde $\{(a_p, \alpha_p)\}$ está por (a_1, α_1), (a_2, α_2), (a_p, α_p) y

(2.2)

$$m(\xi, \eta) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(1-\alpha_j+\alpha_j\,\xi+\alpha_j\eta) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(b_j-\beta_j\xi-\beta_j\eta)}{\prod_{j=m_1+j}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j\,\xi-\alpha_j\eta) \prod_{j=n_j+1}^{q_1} \Gamma(j-b_j+\beta_j\xi+\beta_j\eta)}\ x$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j-\delta_j\xi) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(1-e_j+\epsilon_j\eta)}{\prod_{j=m_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j\xi) \prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j\xi) \prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-\epsilon_j\eta)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j-\rho_j\eta)}{\prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+\rho_j\eta)}$$

donde p_i, q_i, m_i y n_i $(i = 1, 2, 3,)$ son integrales no negativas tales que $0 \leqslant m_i \leqslant p_i$, $0 \leqslant n_i \leqslant q_i$. a_j, b_j, c_j, d_j, e_j y f_j son números complejos y α_j, β_j, γ_j δ_j, ε_j y ϱ_j son números reales positivos.

Ningún polo de $\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+\alpha_j\eta)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi)$ y $\Gamma(1-e_j+\varepsilon_j\eta)$ coincide con ningún polo de $\Gamma(b_j-\beta_j\xi-\beta_j\eta)$ $\Gamma(d_j-\delta_j\xi)$ y $\Gamma(f_j-\varrho_j\eta)$, respectivamente.

L_1, L_2 son contornos adecuados. x e y no son iguales a cero.

$x^{\xi}=\exp\{\xi(\log|x|+i \arg x)\}$;

$y^{\eta}=\exp\{(\log|y|+i \arg y)\}$, en la cual $\log|x|$ y $\log|y|$ denota el logaritmo natural de $|x|$ y $|y|$.

La integral a la derecha de (2.1) es convergente en las siguientes condiciones:

(2.3)

$$\mu_1 \equiv \left[\sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j - \sum_{j=m_j+1}^{p_1} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n_1} \beta_j - \sum_{j=n_j+1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{m_2} \gamma_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=m_2+1}^{p_2} \gamma_j + \sum_{j=1}^{n_2} \delta_j - \sum_{j=n_2+1}^{q_2} \delta_j \right] > O$$

$$\mu_2 \equiv \left[\sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j - \sum_{j=m_1+1}^{p_1} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n_1} \beta_j - \sum_{j=n_1+1}^{q_1} \beta_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_3} \epsilon_j - \sum_{j=m_3+1}^{p_3} \epsilon_j + \sum_{j=1}^{n_2} \delta_j - \sum_{j=n_2+1}^{q_2} \delta_j \right] > O$$

$$\mu_3 \equiv \left[\sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_j \right] > O$$

$$\mu_4 \quad \left[\sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{q_3} \rho_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{p_3} \epsilon_j \right] > O$$

(v) $|\arg x| < \tfrac{1}{2}\mu_1\pi$, $|\arg y| < \tfrac{1}{2}\mu_2\pi$.

(3) NOTACION: En este trabajo usamos la notación:

$$M \left[\begin{array}{c|c} \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \begin{matrix} m_2 & , & n_2 \\ p_2 - m_2 & , & q_2 - n_2 \end{matrix} & \{(cp_2,\ \gamma p_2)\}\ ;\ \{(dq_2,\ \delta q_2)\} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array} \left| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} \right. \right]$$

para designar que los parámetros mostrados como ------- son los mismos que los de $M(x,y)$ en (2.1).

El operador de diferencia finita E usado en este trabajo [4, p. 33 con $\gamma = 1$] se define como sigue:

$$E_a\, f(a) = f(a+1), \quad E_a^n\, f(a) = f(a+n)$$

(4) INTEGRALES: Establecemos las integrales siguientes:

Primera Integral

(4.1)

$$\int_0^1 \eta^{\rho-1} (1-\eta)^{\beta-1} \, . \, M\left(x\eta^{\frac{m}{h}} \, . \, y \right) x \, . \, {}_uF_v\left(\begin{matrix} \alpha u \\ \beta v \end{matrix} ; Z\eta^t \right) . \, {}_2F_1 \left(\alpha \, . \, 2 \, . \, \beta \, ; \, 1-\eta \right) . \, d\eta \, .$$

$$= \Gamma(\beta) \, . \, \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} (\alpha_j)_\mu \, . \, Z^\mu}{\prod_{j=1}^{v} (\beta_j)_\mu \, (\mu)!} \, x$$

$$x \, M \left[\left(\begin{matrix} m_2+2 \, , & n_2 \\ \\ p_2-m_2 \, ; & q_2+2-n_2 \end{matrix} \right) \left| \begin{matrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1-\rho-\mu t, \frac{m}{h}), \quad \{(dq_2, \delta q_2)\}, \\ (1-\rho-\mu t-\beta+\alpha+\nu, \frac{m}{h}), \quad (1-\rho-\mu t-\beta+\alpha, \frac{m}{h}), \\ \\ \{(cp_2, \gamma p_2)\} \, ; \, (1-\rho-\mu t-\beta+\nu, \frac{m}{h}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ \\ \\ \\ y \end{matrix} \right]$$

siempre que $(\beta) > 0$, $u \leqslant v$ (o $u = v+1$ y $|z| < 1$) ninguna de $\beta_1, \beta_2, ----, \beta_v$ es cero o entero negativo.

$$\text{Re } (\varrho + \frac{m}{h} . d_j / \delta_j) > 0 \text{ para } j = 1; 2; ----; \, n_2$$

Re $(\varrho + \beta - \alpha - \nu)$ 0, es un entero positivo y se satisfacen las condiciones de (2.3).

Segunda Integral:

(4.2)

$$\int_{o}^{t} x^{\rho-1} (t-x)^{\delta-1} M(zx^{\lambda} \;.\; {}_{\mu}F_{\nu} \begin{smallmatrix}\alpha\mu \\ \beta\nu\end{smallmatrix} ;\, kx^{\nu} (t-x)^{\mu} \quad dx$$

$$= t^{\rho+\delta-1} \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\displaystyle\pi_{j=1}^{\mu} \; (\alpha_j)_g \; (k\, t^{\mu+\alpha})^g \; \Gamma(\delta+\mu g)}{\displaystyle\pi_{j=1}^{\nu} \; (\beta_j)_g \quad (g)!} \qquad x$$

$$x\; M \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & x \\ \left(\begin{array}{cc} m_2+1 \;, & n_2 \\ p_2-m_2 \;, & q_2+1-n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} (1-\rho-\nu g,\ \lambda), \qquad \{(dq_2,\ \delta q_2)\}, \\ \quad \{(cp_2,\ \gamma p_2)\};\ (1-\rho-\nu g-\delta-\mu g,\ \lambda) \end{array} & \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & y \end{array} \right]$$

siempre que $u \leqslant v$ (or $u=v+1$ α $|kt^{\mu+2}|<1$) ninguna de $\beta_1, ----, \beta_v$ es cerc o entero negativo.

Re $(\varrho+\lambda d_j/\delta_j)>0$ para $j=1,\ 2,\ ----,\ n_2$.

$\lambda>0$, Re $(\delta)>0$ y se satisfacen las condiciones de (2.3) cuya x se reemplaza por z.

DEMOSTRACION DE (4.1):

Para la demostración de (4.1) usaremos la siguiente integral:

(4.3)

$$\int_{o}^{1} \eta^{\rho-1} \; (1-\eta)^{\beta-1} \; M(x\eta^{\frac{m}{h}} \;.\; y) \;.\; d\eta$$

$$= \Gamma(\beta) \;.\; M \left[\begin{array}{c|c|c} \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & x \\ \left(\begin{array}{cc} m_2+1 \;, & n_2 \\ & \\ p_2-m_2 \;, & q_2+1-n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1-\rho,\ \frac{m}{h}),\ \{(dq_2,\ \delta q_2)\}, \\ \\ \{(cp_2,\ \gamma p_2)\};\ (1-\rho-\beta,\ \frac{m}{h}) \end{array} & \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & y \end{array} \right]$$

que puede demostrarse fácilmente expresando M como función de contorno de Mellin-Barne de (2.1) intercambiando de integración, y evaluando la integral interna y luego haciendo la interpretación usando (2.1).

Las condiciones de convergencia de (4.3) están incorporadas en (4.1) Multiplicando (4.3) por

$$\frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta)\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(\nu) \qquad z^{\delta}}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta)\ \Gamma(\beta)}$$

y tratando ambos lados por el $\exp(E_{\varrho}^{t}\,E_{\delta}+E_{\alpha}\,E_{\beta}\,E_{\nu})$ obtenemos:

(4.4)

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\ \sum_{g=0}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+\mu)}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+\mu)} \qquad \eta^{\delta+\mu t-1}(1-\eta)^{\beta+g-1}$$

$$z^{\delta+\mu}\ \frac{\Gamma(\alpha+g)\ \Gamma(\nu+g)}{\Gamma(\beta+g)\quad (g)!}\ M(x\eta^{\frac{m}{h}}\ .\ y)\ d\eta$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\ \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+\mu)\ z^{\delta+\mu}\Gamma(\alpha+g)\ \Gamma(\nu+g)}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+\mu)\quad (\mu)!\quad (g)!}\ x$$

$$x\ M\left[\begin{array}{c|c|c} \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & x \\ \left(\begin{array}{ll} m_2+1\ , & n_2 \\ p_2-m_2\ , & q_2+1-n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} (1-\rho-\mu t,\ -),\qquad \{(dq_2,\ \delta q_2)\}, \\ \{(cp_2,\ \gamma p_2)\};\ (1-\rho-\mu t-\beta-g,\ \frac{m}{h}) \end{array} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & y \end{array}\right]$$

Después de intercambiar el orden de integración y suma y de evaluar la suma obtenemos al lado izquierdo de (4.4)

(4.5)

$$z^{\delta} \int_{0}^{1} \eta^{\delta-1}(1-\eta)^{\beta-1} M\left(x\eta^{\frac{m}{h}}, y\right) {}_{\mu}F_{\nu}\left(\begin{matrix}\alpha\mu+\delta \\ \beta\nu+\delta\end{matrix} ; z\eta^{t}\right) \times$$

$$\times\ {}_2F_1(\alpha, \nu, \beta; 1-\eta)\, d\eta \quad \frac{F(\nu) \prod_{j=1}^{\mu} F(\alpha_j+\delta)\ F(\alpha)}{\prod_{j=1}^{\nu} F(\beta_j+\delta)\ .\ F(\beta)}$$

Entonces reemplazando la función M por una integral de contorno Mellin-Barne, y cambiando el orden de la suma e integración y simplificando un poco la parte derecha de (4.4) resulta:

(4.6)

$$\frac{1}{(2\pi 1)^2} z^{\delta} \int_{L_1} \int_{L_2} m(\xi, \eta)\, x^{\xi}\, y^{\eta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+\mu)}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+\mu)}$$

$$\frac{\times\ z^{\mu}\ .\ \Gamma(\delta+\mu t+\frac{m}{h}\xi)\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(\nu)}{(\mu)!\ \ \Gamma(\rho+\mu\ .\ t+\beta+\frac{m}{h}\ .\ \xi} \times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\alpha, \nu, \rho+\mu t+\beta+\frac{m}{h}\xi; 1\right) d\xi\ .\ d\eta$$

Usando ahora el teorema de Gauss 8, cambiando el orden de inte gración y de suma e interpretando el resultado por el uso de la parte a la derecha de (4.4) se reduce a:

(4.7)

$$z^{\delta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu) \prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+\mu)\ \ z^{\mu}\Gamma(\alpha)}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+\mu)\ \ (\mu)!}$$

$$
\times M \left[\begin{array}{c|cc|c}
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & x \\
& (1-\rho-\mu t, \frac{m}{h}), & \{(dq_2, \delta q_2)\}, & \\
\left(\begin{array}{cc} m_2+2 & , \; n_2 \\ p_2-m_2 & , \; q_2+2-n_2 \end{array} \right) & (1-\rho-\mu t - \beta+\alpha+\alpha, \frac{m}{h}), & (1-\rho-\mu t-\beta+\alpha, \frac{m}{h}), & \\
& \{(cp_2, \gamma p_2)\}; & (1-\rho-\mu t-\beta+\alpha, \frac{m}{h}) & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & y
\end{array} \right]
$$

Ahora de (4.5) & (4.7) reemplazando $\alpha_j+\delta$ por α_j y $\beta_j+\delta$ por β_j se obtiene el resultado requerido.

DEMOSTRACION DE (4.2)

Se usará la siguiente integral para demostrar (4.2):

(4.8)

$$
\int_0^t x^{\rho-1} (t-x)^{\delta-1} M (zx^{\lambda}, y) \, dx
$$

$$
\Gamma(\delta) \, t^{\rho+\delta-1} \; M \left[\begin{array}{c|cc|c}
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & z \\
\left(\begin{array}{cc} m_2+1 & , \; n_2 \\ p_2-m_2 & , \; q_2+1-n_2 \end{array} \right) & (1-\rho, \lambda), & \{(dq_2, \delta q_2)\}, & \\
& \{(cp_2, \gamma p_2)\} \; ; & (1-\rho-\delta, \lambda) & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & y
\end{array} \right]
$$

que puede ser demostrada expresando la función M como integral doble de contorno de Mellin-Barne de (2.1) en la parte a la izquierda de (4.8) e intercambiando el orden de integración y de nuevo interpretando los resultados usando (2.1).

Luego multiplicando ambos lados de (4.8) por

$$
\frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta) \, k^{\delta}}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta)}
$$

y operando a ambos lados con $\exp(E^{\nu}_{\varrho} E^{\mu}_{\sigma} E_{\delta})$ obtenemos:

(4.9)

$$\sum_{g=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+g) \quad k^{\delta+g}}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+g) \quad (g)!} \int_{o}^{t} x^{\varrho+\nu g-1} (t-x)^{6+\mu g-1} \times M(zx^{\lambda}, y) \, dx$$

$$\sum_{g=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta+g) \quad k^{\delta+g}}{\prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta+g) \quad (g)!} \Gamma(6+g\mu) \qquad t^{2y+\rho+\mu g+6-1} \; x$$

$$x\, M\left[\begin{pmatrix} m_2+1 \;, & n_2 \\ p_2-m_2 \;, & q_2+1-n_2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{ll} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (1-\rho-\nu g, \lambda), & \{(dq_2, \delta q_2)\}, \\ \{(cp_2, \gamma p_2)\}; & (1-\rho-\nu g-6-\mu g, \lambda) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array} \right| \begin{array}{l} z \\ \\ \\ y \end{array}\right]$$

Intercambiando el orden de integración y suma y evaluando la sum al lado izquierdo de (4.9) resulta:

$$k^{\delta} \frac{\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j+\delta)}{\prod^{\nu} \Gamma(\beta_j+\delta)} \int_{o}^{t} x^{\varrho-1} (t-x)^{6-1} \; M(zx^{\lambda}, y) \; x \; x \; {}_{\mu}F_{\nu} \; \begin{matrix} \alpha\mu \\ \beta\nu \end{matrix} \; ; \; kx^{\nu} \; (t-x)^{\mu} \quad . \, dx$$

ahora cambiando $\alpha_j+\delta$ dentro de α_j y $\beta_j+\delta$ en β_j se obtiene el resultadc requerido.

La función M de dos variables es una función muy generalizada. Cor especialización de los parámetros convenientes puede ser reducida a la fun-

:ión G de R. P. Agrawal [1], a la función S de Sharma B. L. [9], a la función P debida a Pathak [7], a las funciones de Appell F_1, F_2, F_3, F_4 [3], a la función H de Munot y Kalla [6], a la función G_2 de Horn, etc. Por lo :anto puede obtenerse un gran número de resultados relacionados con esas :unciones, deduciéndolos de las conclusiones de este trabajo como caso particular.

REFERENCIAS:

1. AGRAWAL; R. P. "An extension of Meijer's G-function". Proc. of Nat. Inst. of Sciences. India. P. A. (6) vol. 30 pp. 536 - 546 (1965).
2. APPELL-ET KAMPE DE FERRIET. "Functions hypergeometrique et hyperspheriques polynomes d'Hermite Gauthier Villars Paris (1926).
3. HORN, J. Math. Ann-105 pp. 381 - 407 (1931).
4. MILNE, THOMSON. The calculus of finite differences Mac-Millan, London (1933).
5. MOURYA, D. P. Ph. D. thesis approved for ph. D. degree. University of Indore, Indore (1970).
6. MUNOT, P. C. & S. L. KALLA. On an extension of generalised function of two variables. Separata de la Revista Mathematics y Fisica Theorica. Vol. XXXI, 1971. Nos. 1 y 2. Faculted de C. Exacts Technologia. U.N.T.
7. PATHAK, R. S. Some results involving G and H functions. Bull Cal. Math. Society 62. (1970, 97 - 106).
8. RAINVELLE, E. D. Special functions. The MacMillan Company, New York (1960).
9. SHARMA, B. L. "On generalised functions of two variables I" Anna de pa. Soc. Sc. de Brux T 791 pp. 26-40 (1965).