Bol. Acad. C. Fís., Mat. y Nat. Vol LVI No. 1-4, 1996: 81-92

REGULARIDAD-A Y SOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES NO LINEALES

RAM U. VERMA

Resumen: el teorema Petryshyn (1970) acerca de la solución aproximada de no lineales es generalizada para el caso de operaciones A-regulares, una generalización de los operadores A-apropiados, introducida y estudiada por Petryshyn y luego por otros estudios del mismo Petryshyn, y otros. Se consideran también ciertas aplicaciones de significación.

O. INTRODUCCION

Considérese un esquema de aproximación $\pi_0 = \{X_n, Y_n, E_n, R_n, Q_n\}$ que le acompaña representado por el diagrama 1.

$$X \xrightarrow{A} Y$$

$$R_n \downarrow\uparrow E_n \quad \downarrow Q_n$$

$$X_n \xrightarrow{A_n} Y_n$$

Diagrama 1

Aquí X e Y están en un espacio normado de infinitas dimensiones sobre K (e campo real o el campo complejo), y X_n e Y_n son espacios normadc sobre K con $X_n = \dim Y_n < \infty$ para todas las n. Para todas las n, $E_n : X_n \to X$ y $Q_n : Y \to Y_n$ hay operadores de conexión que son lineales y continuos con

$$\sup\|E_n\| < \infty \quad \text{y} \quad \sup\|Q_n\| < \infty.$$

El operador de conexión $R_n : X \to X_n$ posiblemente es no lineal. Loc operadores $A_n = Q_n A E_n$ son no lineales y continuos, cuando $A : X \to Y$ es nc lineal.

Petryshyn [3] en una serie de publicaciones, consideró en el estudio de problema: la construcción de una solución x de la ecuación

$$Ax = b(x \in X, b \in Y)$$

Como un límite fuerte de las soluciones x_n de las ecuaciones simples de dimensiones finitas (llamadas ecuaciones de aproximación)

$$A_n x_n = Q_n b(x_n \in X_n, n = 1,2,\ldots)$$

con respecto al esquema de aproximación π_0.

Para resolver el problema, Petryshyn desarrollando la noción del operador A-apropiado $A : X \to Y$, que esta no solo en unión cerrada con la aproximación de solubilidad de la ecuación $Ax = b$, sino que se extiende y unifica las investigaciones que encierran los tipos de métodos de Galerkin para las ecuaciones con operadores lineales y no lineales lo cual resulta en la teoría de operadores muy monótonos y operadores del tipo (S), que se condensan en bolas y otras representaciones. Para mas detalles sobre la aproximidad de solubilidad véase (1-7) y (9).

Aquí consideramos en primer lugar la aproximación de solución de la ecuación $Ax = b$ en el contexto de un A regular, una generalización del A-apropiado en los espacios normales. En segundo lugar estudiamos la aproximación de solución en un escenario de espacio de Hilbert. En tercer lugar estudiamos la aproximación de solución en un espacio reflexivo de Banach. Los resultados, así obtenidos parecen generalizar los resultados que se refieren a los referentes al A -apropiados.

Una nota de precaución: en lo que sigue, los símbolos "$\longrightarrow$" y "$\xrightarrow{w}$" representan la convergencia fuerte y la convergencia débil.

DEFINICION 0.1 (Convergencia discreta). Sea $\{x_n\}$ una serie de elementos con $x_n \in X_n$ para toda $n \in N$. La serie $\{x_n\}$ se dice converge discretamente a $x \in X$, expresado por $x \xrightarrow{d} b$, si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - R_n x\|_{X_n} = 0.$$

De modo similar $\{y_n\}$ con $y_n \in Y_n$ se dice que converge discretamente a $b \in Y$, se indica por $y_n \xrightarrow{d} b$, si

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - Q_n b\|_{Y_n} = 0.$$

1. APROXIMACION GENERAL DE SOLUCION

Estamos al punto de generalizar el teorema de Petryshyn [3] para operadores A -apropiados.

TEOREMA 1.1. Sea $\pi_0 = \{X_n, Y_n, E_n, R_n, Q_n\}$ un esquema aproximado representado por el Diagrama 1 con las suposiciones siguientes:

(A1) Esquema de la aproximación admisible. El esquema π_0 de aproximación es admisible si la condición de compatibilidad es satisfecha, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n R_n x - x\|_X = 0 \text{ para toda } x \in X. \qquad (1.1)$$

(A2) Consistencia. El esquema de aproximación π_0 es consistente si, $A_n R_n x \xrightarrow{d} Ax$ para toda $x \in X$.

Aquí $A_n R_n x \xrightarrow{d} A_n$ significa

$$\|A_n R_n x - Q_n A x\|_{Y_n} = 0$$

A3) Estabilidad. El esquema π_0 de aproximación es estable si existe un n_0 tal que

$$\|A_n u - A_n v\|_{Y_n} \geq \mu(\|u - v\|_{X_n})$$

para todo $\upsilon, v \in X_n, n \geq n_0$. Aquí μ es una función apropiada de evaluación.

Luego las siguientes condiciones son equivalentes:

(C1) Posibilidad de Solución. Para cada $b \in Y$, la ecuación $Ax = b$ tiene una solución.

(C2) Solución aproximada única. La ecuación $Ax = b$ se puede resolver con aproximadamente, esto es para $b \in Y$, siempre que se cumpla lo siguiente:

(i) La solución $Ax = b$ tiene una solución única.

(ii) Para cada $n \geq n_0$, la ecuación aproximada $A_n x_n = Q_n b, u_n \in X_n$, tiene una sola solución.

(iii) La serie $\{x_n\}$ converge directamente a la solución x de la ecuación $Ax = b$, Esto es,

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - R_n x \|_{X_n} = 0.$$

(C3) A –Regularidad. El operador $A : X \to Y$ es A -apropiado con respecto al esquema de aproximación π_0, es decir, dada una serie limitada $\{x_n\}$ con $A_n x_n \to b$, existe una subserie $\{x_n\} \subset \{x_n\}$ y una $x \in X$ tal que.

$$x_n \xrightarrow{d} x \quad \text{y} \quad Ax = b.$$

Con mas precisión, se puede definir la teoría así: si π_0 es un esquema de aproximación admisible, que tiene consistencia y estabilidad, luego la ecuación $Ax = b$ tiene una única solución aproximada si el operador $A : X \to Y$ es A -apropiado

COROLARIO 1.2. Sea π_0 un esquema de aproximación admisible que satisface la ecuación de estabilidad si $A : X \to Y$ es A-regular luego lo siguiente se cumple.

(i) Para cada $b \in Y$, la ecuación $Ax = b, x \in X$, tiene una solución.

(ii) Para cada $b \in Y$ y cada $n \geq n_0$, la ecuación aproximada $A_n x_n = Q_n b, x_n \in X_n$, tiene una solución única

(iii) La serie $\{x_n\}$ tiene una subserie $\{x_{n'}\}$ tal que.

$$x_{n'} \xrightarrow{d} x \text{ en } X.$$

(iv) Si para alguna $b \in Y$, la ecuación $Ax = b$ tiene una solución única, entonces toda la serie $\{x_n\}$ converge discretamente a x, es decir,

$$x_{n'} \xrightarrow{d} x \ .$$

COROLARIO 1.3. Sea π_0 la representación de un esquema admisible de aproximación y sea $A: X \to Y$ un A -regular. Si alguna $b \in Y$ y toda $n \geq n_0$, la ecuación aproximada $A_n x_n = Q_n b, x_n \in X_n$, tiene una solución única y tenemos un estimado A priori $\sup \|x_n\|_{X_n} < \infty$, luego siguen las implicaciones siguientes:

(i) existe una subserie $\{x_{n'}\}$ tal que

$$x_{n'} \xrightarrow{d} x \text{ y } Ax = b.$$

(ii) Solo la ecuación $Ax = b, x \in X$, existe una solución única, luego

$$x_n \xrightarrow{d} x.$$

COROLARIO 1.4. Sea π_0 un esquema de solución admisible aproximado. Si el operador $A: X \to Y$ es A-regular con respecto a π_0 y si $C: X \to Y$ es compacto, luego $A + C$ es también A -apropiado.

DEMOSTRACIÓN. Por brevedad, escribiremos n por n'. Sea $\sup \|x_n\| < \infty$, y $A_n x_n \xrightarrow{d} b$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n x_n - Q_n b\| = 0$$

Con $A_n = Q_n(A+C)E_n$. Como $\sup\|E_n\| < \infty$, la serie $\{E_n x_n\}$ es limitada. Dado que el operador C es compacto, existe una subserie de $\{x_n\}$, designada por $\{x_n\}$, tal que

$$CE_n x_n \to z \text{ en } Y \text{ al } n \to \infty. \quad (1.2)$$

Como $\sup\|Q_n\| < \infty$, implica que

$$\|Q_n CE_n x_n - Q_n z\| \to 0 \text{ al } n \to \infty.$$

Se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n AE_n x_n - Q_n(b-z)\| = 0.$$

Dado que A es A –apropiado, hay una subserie, designada de nuevo por $\{x_n\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - R_n x\| = 0 \text{ y } Ax = b - z.$$

Como $\sup\|E_n\| < \infty$, esto implica que

$$\|E_n x_n - E_n R_n x\| \to 0 \text{ al } n \to \infty.$$

Para la condición de compatibilidad (1.1.), tenemos

$$\|E_n x_n - x\| \to 0 \text{ al } n \to \infty. \quad (1.3)$$

Como C es compacto, por (1.2) y (1.3), tenemos

$$Cx = z.$$

Luego, $x_n \xrightarrow{d} x$ y $(A+C)x = b$, esto es, $A + C$ es A - regular.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1. En método de demostración es como sigue:

$$(C3) \Rightarrow (C2) \Rightarrow (C1) \Rightarrow (C3)$$

Estas implicaciones son similares a la del caso de A -apropiados [5].

2. APROXIMACION DE SOLUCION EN ESPACIOS DE HILBERT

Sea $\pi_1 = \{X_n, E_n, P_n\}$ un esquema de aproximación representado por el diagrama 2

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X \\ P_n \downarrow\uparrow E_n & & \downarrow P_n \\ X_n & \xrightarrow{A_n} & X_n \end{array}$$

Diagrama 2

X es un espacio separable de Hilbert de infinitas dimensiones sobre K, y $\{e_i\}$ es un sistema completo ortonormal en X con.

$$X_n = span\{e_1, \dots, e_n\}.$$

Sea $P_n : X \to X_n$ la proyección de operadores de X en X_n y sea $E_n : X_n \to X$ los operadores conectantes con $X_n \subseteq X$. Los operadores $A_n = P_n A E_n$ son continuos.

Consideremos la ecuación de operadores

$$Ax = b(x, b \in X) \tag{2.1}$$

junto con las ecuaciones aproximadas.

$$P_nAx_n = P_nb(x_n \in X_n, n = 1,2,\ldots)$$

Correspondiente al esquema de aproximación π_1 representado por el diagrama 2 De $n = 1,2,\ldots,$ la ecuación aproximada (2.2) son equivalentes a las siguientes ecuaciones de Galerkin

$$\langle Ax_n, e\rangle = \langle b, e_j\rangle \quad (x_n \in X_n, j = 1,\ldots,n), \tag{2.3}$$

Donde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es el producto tipo interno.

TEOREMA 2.1. Sea $\pi_1 = \{X_n, E_n, P_n\}$ un esquema de aproximación representado del diagrama 2. Si $A: X \to X$ es continuo y muy estable, luego A-apropiado y para cada $b \in X$, la ecuación.

$$Ax = b, \quad x \in X,$$

Es una solución aproximada única.

DEMOSTRACION. La demostración se deduce por la aplicación del teorema 1.1. Con este objetivo necesitamos nosotros que el esquema de aproximación mostrar sea un esquema admisible de aproximación, y el operador A es A-apropiado. Como no es difícil ver que π_1 es una aproximación admisible con consistencia y estabilidad, mostramos que A es A-apropiado justamente para concluir la demostración.

Supongamos $\sup\|x_n\| < \infty$ y $A_nx_n \xrightarrow{d} b$, esto es,

$$\|A_nx_n - P_nb\| \to 0 \quad \text{como} \quad n \to \infty \quad \text{por} \quad x_n \in X_n.$$

Como X es reflexivo, existe una subserie, de nuevo designada $\{x_n\}$, tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{como} \quad n \to \infty.$$

Luego de $P_nx \to x$ en X resulta que

$$x_n - P_nx \xrightarrow{w} 0 \quad \text{como} \quad n \to \infty.$$

Ahora, por la condición de estabilidad para $d > 0$, tenemos al $n \to \infty$,

$$d\|x_n - p_n x\|^2 \le |\langle A_n x_n - A_n P_n x, x_n - P_n x\rangle|$$

$$= |\langle A_n x_n - P_n b + P_n b - A_n P_n x, x_n - P_n x\rangle|$$

$$= |\langle A_n x_n - P_n b, x_n - P_n x\rangle + \langle P_n b - A_n P_n x, x_n - P_n x\rangle|$$

$$= |\langle A_n x_n - P_n b, x_n - P_n x\rangle + \langle P_n b - P_n A P_n x, x_n - P_n x\rangle|$$

$$\to |\langle 0,0\rangle + \langle b - Ax, 0\rangle| \to 0.$$

Esto implica que $\|x_n - P_n x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, esto es $x_n \xrightarrow{d} x$. Como A es continuo, esto implica que $Ax = b$, y A es A - regular.

3. APROXIMACION DE SOLUCION EN LOS ESPACIOS DE BANACH.

Sea $\pi_2 = \left\{ X_n, \overset{\bullet}{X}_n, E_n, R_n, \overset{\bullet}{E}_n \right\}$ un esquema de aproximación representado por el Diagrama 3.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X^{\bullet} \\ R_n \downarrow\uparrow E_n & & \downarrow \overset{\bullet}{E}_n \\ X_n & \xrightarrow{A_n} & \overset{\bullet}{X}_n \end{array}$$

Diagrama 3

Aquí hacemos la siguiente hipótesis que corresponde el esquema de aproximación π_2: X en un espacio separable de Banach de infinitas dimensiones. Sea $\{X_n$ un esquema de Galerkin en X con

$$X_n = span\{e_{1n}, \dots, e_{n'n}\},\ n = 1,2,\dots,.$$

Sea $E_n : X_n \to X$ el operador conectante con $X_n \subseteq X$. El operador $R_n : X \to X$ esta constituido en forma tal, que cada $x \in X$, es a lo menos un elemento $R_n x$ tal que

$$\|x - R_n x\| = dist(x, X_n).$$

Sea el operador $A_n = \overset{\bullet}{E}_n A E_n$ continuo.

Consideremos la ecuación del operador

$$Ax = b\left(x \in X, b \in X^{\bullet}\right) \tag{3.1}$$

Junto con las ecuaciones aproximadas

$$E_n^{\bullet} A E_n x_n = E_n^{\bullet} b,\ x_n \in X_n,\ n = 1,2,\ldots, \tag{3.2}$$

con respecto al esquema de aproximación π_2.

Para la aproximaciones $n = 1,2,\ldots,$ las ecuaciones aproximadas (3.2) sor equivalentes a ecuaciones de Galerkin

$$[Ax_n, e_{jn}] = [b, e_{jn}],\quad x_n \in X_n,\quad j = 1,\ldots,n', \tag{3.3}$$

donde $[\cdot,\cdot]$ es el mutuo aparejamiento entre $X^{\bullet}$ y X.

TEOREMA 3.1 Sea $\pi_2 = \left\{X_n, \overset{\bullet}{X}_n, E_n, R_n, \overset{\bullet}{E}_n\right\}$ un esquema de aproximación representado por el diagrama 3. Si el operador $A : X \to X^{\bullet}$ es continuo y uniformemente monótono, luego A es A-apropiado y para cada $b \in X^{\bullet}$ la ecuación.

$$Ax = b,\ \ x \in X,$$

es una solución aproximada única.

Si $C : X \to X^{\bullet}$ es compacta luego el operador $A + C : X \to X^{\bullet}$ es A - regular.

DEMOSTRACION. Como es fácil ver que el esquema de aproximación π_2. es un esquema de aproximación admisible con consistencia y estabilidad, todo lo que necesitamos mostrar es que A es A - regular.

Sea $\sup\|x_n\| < \infty$ y $A_n x_n \to b$ en $X^{\bullet}$ por $x_n \in X_n$. Como X es reflexivo, existe una subserie, designada de nuevo por $\{x_n\}$ tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x \ \text{ al } \ n \to \infty.$$

Por consecuencia de la construcción del operador $R_n : X \to X_n$ que

$$\|x - R_n x\| \to 0 \text{ al } n \to \infty.$$

Luego como $n \to \infty$,

$$x_n - R_n \xrightarrow{w} 0.$$

Aquí la condición de estabilidad resulta uniforme por la monotoria de A. Ahora por la condición de estabilidad tenemos al $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\mu(\|x_n - R_n x\|)\|x_n - R_n x\| &\le [A_n x_n - A_n R_n x, x_n - R_n x] \\
&= [A_n x_n - E_n^{\bullet} b + E_n^{\bullet} b - A_n R_n x, x_n - R_n x \\
&= [A_n x_n - E_n^{\bullet} b, x_n - R_n x] + [E_n^{\bullet} b - A_n R_n x, x_n - R_n x] \\
&= [A_n x_n - E_n^{\bullet} b, x_n - R_n x] + [E_n^{\bullet} b - E_n^{\bullet} A R_n x, x_n - R_n x \\
&= [A_n x_n - E_n^{\bullet} b, x_n - R_n x] + [b - A R_n x, E_n x_n - E_n R_n x] \\
&= [A_n x_n - E_n^{\bullet} b, x_n - R_n x] + [b - A R_n x, x_n - R_n x] \\
&\to [0,0] + [b - Ax, 0] \to 0.
\end{aligned}$$

Esto implica $\|x_n - R_n x\| \to 0$ al $n \to \infty$, esto es $x_n \xrightarrow{d} x$. Como A es continuo y $\|x - R_n x\| \to 0$ al $n \to \infty$, obtenemos $Ax = b$. Luego A es A- regular, y el teorema se deduce del Teorema 1.1

REFERENCIAS

1. p. M. Anselone y R. Ansorge, A unified framework for the discretization of nonlinear operator equations, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 4 (1981), No. 1, 61-99.

2. P. S. Milojevic', Approximation-solvability of some noncoercive nonlinear equations and semilinear problems at resonance with applications, Proc. Intern. Sem. Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II, Edited by G. Zapata, p 259-215, Elsevier Science (North-Holland), 1984.

3. W. Petryshyn, Nonlinear equations involving noncompact operators, Nonlinear Functional Analysis, edited by F. Browder, Proc. Sympos. Pure Math. Vol 18 Part I (1968), 206-233, Amer. Math. Soc., Providence, EI, 1970.

4. W. Petryshyn, On the approximation-solvability of equations involving A-proper and pseudo-A-proper mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 233-312

5. W. Petryshyn, Approximation-solvability of periodic boundary value problems via the A-proper mapping theory, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 45 (1986), 261-282, Amer. Math. Soc. Providence.

6. R. U. Verma, Role of numerical range in approximarion-solvability of sonlinear functional equations, Appl. Math. Lett. 5 (1982), No. 5, 25-27.

7. R. U. Verma, Phi-stable operators and inner approximation-solvibility, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), No. 2, 491-499.

8. E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications I, Springer-Verlag, New York, 1986.

9. E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications II/B, Springer-Verlag, New York, 1990.