Bol. Acad. C. Fís., Mat. y Nat. Vol LIV, No. 3-4, 1994: 85-92

PROPIEDAD A-ESTOCASTICA Y SOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES ESTOCASTICAS NO LINEALES EN ESPACIOS DE PRODUCTOS SEMI - INTERNOS

Ram U. Verma
International Publications
12046 Coed Drive, Orlando, FL 32826
and
Istituto per la Ricerca di Base
Division of Mathematics
I - 86075 Monteroduni (IS), Molise, Italy

Resumen. La solución aproximada estocástica de ecuaciones no lineales se basa en esquemas de aproximación estocástica que se obtiene en un escenario de espacio de Hilbert.

1. INTRODUCCION

El estudio sistemático de las ecuaciones estocásticas fue iniciado por primera vez por los probabilistas de la Escuela de Praga hacia mediados de los años cincuenta, y su desarrollo fue luego incentivado por un artículo de Bharucha - Reid[1]. La literatura de la teoría de los operadores probabilísticos consiste en general de variables estocásticas, cuyos valores son operadores funciones estocásticas; cuyos valores son operadores de ecuaciones estocásticas cuyas soluciones son operadores, de la teoría espectral de los operadores estocásticos y de la teoría estocástica de los puntos fijos.

En la determinística de la propiedad A- iniciada y desarrollada por Petryshyn[6], consideramos la solución estocástica aproximada de las ecuaciones estocásticas en un escenario de espacios de productos semi - internos. Los resultados obtenidos generalizan los resultados del autor en un escenario de un espacio de Hilbert[9].

Considerese un espacio de medida probabilística completa (W, F, μ). Sea X un espacio real separable de Banach con un producto semi-interno [. , .] y la norma correspondiente $\|.\|$. B (X) indica la 6 - algebra de los subconjuntos X de Borel, y f:W$\rightarrow$ X una función tal que f^{-1} (B) está en F siempre que B está en B (X), es decir, f es una variable estocástica con valores en X es decir, es una función medible de Borel. Un operador T:W x X$\rightarrow$ X es un operador estocástico si {w en W : T (w, x) está en B} está en F para todo x en X y B está en B (X). Un operador T:W x X $\rightarrow$X es medible si es medible con respecto a la 6- algebra F x B (X), esto es {(w,x): T (w, x) está en B} está en F x B (X). Un operador estocástico T continuo si para cada w en W, T(w,.) es continuo.

Definición 1.1. Un operador estocástico T: W x X $\rightarrow$ X se dice que es muy monótono si para todo w en W y para todo valor real de la variable estocástica c con c (w) > 0 para todo w en W.

(1.1) $[T(w,u) - T(w,v.), u\text{-}v] \geq c(w) \|u\ v\|^2$

Desigual modo (1.1) implica que

(1.2) $\|T(w,u) - T(w,v)\| \geq c\ (w)\ \|u - v\|.$

Un operador estocástico que satisfaga (1.2) se llama c (w) - extensible. El operador estocástico T es d (w)-Lipschitz continuo si para todo u, v en X, existe un valor real de la variable estocástica d con d (w) > 0 para toda w en W es tal que

(1.3) $\|T(w,u) - T(w,v)\| \leq d(w) \quad \|u - v\|$

Con este objeto, recordemos ciertos resultados fundamentales para el presente trabajo.

Lema 1.1 [2]. Sean X, Y y Z espacios separables reflexivos de Banach, T: W x X $\rightarrow$Y un operador continuo estocástico U: W x Z $\rightarrow$ X un operador estocástico, y x: W $\rightarrow$ X es medible. Luego:

(i) $w \to T(w, x(w)$ es medible

(ii) TOU es un operador estocástico en W x Z.

Lema 1.2 [3]. Sea D: $W \to 2^X$ medible y T: GrD $\to$ CB(X) un operador estocástico continuo de valor es conjuntistas con un dominio estocástico D, tal que para todo w en W, {x en D (w) : x está en T (w,x} $\neq \emptyset$.

Luego T tiene un punto fijo estocástico.

Lema 1.3 [2]. Sea $e_1,\ldots, e_n$.$W \to X$ medible para todo n en N. Para todo w en W, sea X_n : = desarrollo $\{e_1(w),\ldots,e_n(w)\}$. Luego X_n: $W \to 2^X$ es medible.

2. SOLUCION ESTOCASTICA APROXIMADA

En esta sección discutimos la solución estocástica aproximada basada en la aproximación de esquemas determinísticos. Con objeto de resolver una ecuación no lineal determinística.

(2.1) $\quad Tx=y \quad$ (x en X)

y las ecuaciones correspondientes aproximadas

(2.2) $\quad T_n x_n = R_n y$,

donde T_n : R_n TE_n y T :$X \to$ X son no lineales y continuas, consideramos un esquema de aproximación $\Pi_0 = \{X_n, E_n, R_n\}$, donde $\{X_n\}$ es una serie creciente de subespacios de dimensiones finitas de X tales que

$\overline{\bigcup_{n \geq 1} X_n} = X$ y $E_n : X_n \to X$ denoten inclusiones. Sea $\{X_n\}$ un esquema Galerkin tal que X_n :=desarrollo $\{e_1,\ldots, e_n\}$. Basado un problema de límite [10,] los operadores R_n :$X \to X_n$ con $\| R_n y \| \leq r(y)$ para cada y en X para r (y) > 0 e independiente de n se constituyen del modo siguiente: Para cada x en X hay por lo menos un elemento $R_n x$ tal que $\| x - R_n x \|$ = distancia (x, X_n), además, R_n es p-extensible y continuo q-Lipschitz. Los operadores $T_n := R_n TE_n$ son no lineales y continuos, donde T: X $\to$ X es no lineal y continuo.

Debemos recordar el teorema de Petryshyn[6] en la solución determinística de solución aproximada de las ecuaciones nolineales en espacios abstractos normados.

Lema 2.1 [6] . Si un esquema de aproximación es admisible, consistente y estable, entonces la ecuación Tx=y es aproximada y unicamente soluble si, y sólo si, el operador T es de propiedad-A.

Definición 2.1 (esquema de aproximación estocástica) Sea T: W x →X un operador estocástico no lineal. Un esquema de aproximación

$\Pi_1 = \{X_n, E_n, R_n\}$ es un esquema de aproximación (estocástico) si $X_n : W \rightarrow 2^X$ son medibles para todo n en N y w en W, X_n (w) son subespacios cerrados de X, y R_n (w) son operadores estocásticos p-extensibles y q-Lipschitz continuos.

Además, definimos T_n (w) : $=R_n$ (w, T (w,.)) esto es,

T_n (w, x_n) : R_n (w,T (w,x_n)) para x_n en X_n (w) Así, T_n (w) es un operador estocástico si T lo es (por el lema 1.1).

Ahora consideremos la solución aproximada con operadores estocásticos de ecuaciones de operadores estocásticos en un escenario de espacio de producto semi-interno. Sea X un espacio separable de Banach y T: W x X →X un operador estocástico no lineal. Consideremos la ecuación no lineal estocástica.

(2.3) $\qquad T(w,x) = y\ (w),$

donde y: W → X es medible con respecto a Π_1 junto con las ecuaciones corresondientes de aproximación.

(2.4) $T_n (w,x) = R_n (w, Y\ (w))$ para x en X_n (w)

Con este fin, presentamos el lema siguiente, una versión no lineal del lema 2, lema 3.2 sobre la mensurabilidad.

Lema 2.2. Sea $\Pi_1 = \{X_n, E_n, R_n\}$ un esquema de aproximación estocástico, y: W $\rightarrow$ X medible, T: X x X $\rightarrow$ X un operador continuo estocástico no lineal, y T_n (w) definido por

T_n (w,x) : = R_n (w, T (w, x)) para x en X_n (w) y para algún k en N,

(2.5) T_k (w,x) R_k (w. u (w))

es soluble en X_k (w) para toda w en W, luego existe una función medible x_k: W $\rightarrow$ X tal que para todo w en W, x_k (w) está en X_k (w) y

(2.6) T_k (w, x_k (w) = R_k (w,Y (w)).

Demostración: Aunque la demostración es análoga a la demostración del caso lineal [2, Lema 3.2], hacemos un breve esquema de la demostración.

Ya que T_k es un operador continuo estocástico y w $\rightarrow R_k$ (w,y (w) es medible (por el lema 1.1), se deduce que

(w, x) $\rightarrow$ x + R_k (w, y (w)) - T_k (w,x)

es un operador continuo estocástico con un conjunto de puntos fijos, digamos, F (w). Ahora la mensurabilidad de F $\cap X_k$ se deduce del lema 1.2 y [4]. Ya que F(w) $\cap X_k$ (w) no es vacio para todo w en W, existe una función medible x_k por una aplicación del teorema de selección[5] de Kuratowski-Ryll-Nardzewski para F $\cap X_k$.

Teorema 2.1. Sea T: W x X $\rightarrow$X un operador estocástico continuo y muy monótono en W x X con una constante positiva c, donde X es un espacio, separable de Banach. Si para toda w en W y n en N,

X_n (w): = desarrollo $\{e_1$ (w),...,en (w)$\}$,

donde e_i : W $\rightarrow$X es medible, y R_n: W x X $\rightarrow$Xn (w) son operadores estocásticos p-extensible y q-Lipschitz continuos, entonces un esquema de aproximación

$\Pi_1 = \{X_n, E_n, R_n\}$ tiene las propiedades siguientes:

(i) Π_1 es un esquema de aproximación estocástica admisible, esto es,

X_n es medible y $\lim_{n \to \infty} \| E_n R_n (w,x) - x \| = 0$

(ii) Π_1 es consistente, es decir, para toda u en X y w en W,

$$\lim_{n \to \infty} \| R_n (w) T (w,x) - T_n (w) R_n (w,x) \| = 0.$$

(iii) Π_1 es estable, esto es, para todo u, v en $X_n (w)$ y constantes positivas p y c,

$$\| T_n (w,u) - T_n (w,v) \| \geq p\, c \| u - v \|.$$

Demostración (i) : X_n es medible por el lema 1.3, y como todos los E_n son inclusiones, $\| E_n \| = 1$. Ya que $\{X_n\}$ es un esquema de Galerkin, dist $(x, X_n (w)) \to 0$ para $n \to \infty$ para toda x en X y w en W. esto implica que $\| R_n (w,x) - x \| n \to 0$, y por lo tanto $\| E_n R_n (w,x) - x \| n \to 0$ al $n \to \infty$.

(ii): Como R_n es q- Lipschitz continuo, $\| Rn (w,x) - x \| \to 0$, y T es continuo, se sigue que (con $n \to \infty$).

$$\| R_n (w) T (w,x) - T_n (w, Rn (w,x)) \|$$

$$= \| R_n (w) T (w,x) - R_n (w) T (w, R_n (w,x)) \|$$

$$\leq q \| T (w,x) - T (w, R_n (w,x)) \to 0.$$

(iii): Dado que T es muy monotono (y por lo tanto c-extensible) y R_n es p-extensible, obtenemos para todo u, v en $X_n (w)$ y w en W,

$$\| Tn (w, U) - Tn (w,v) \|$$

$$= \| R_n (w) T (w,u) - R_n (w) (w, T (w,v)) \|$$

$\leq p \parallel T(w,u) - T(w,v,) \parallel$

$\leq pc \parallel u - v \parallel$

Esto completa la demostración.

Teorema 2.2. Sea $\Pi_1 = \{X_n, E_n, R_n\}$ un esquema de aproximación y sea T x X → X un operador estocástico continuo y muy monotono en W x X, donde X es un espacio realy separable de Banach. Sea y :W →X medible. Luego existen funciones medibles $x, x_r, x_{r+1},...$: W→X tal que para una r en N con $n \leq r$ y para todo w en W, $x_n(w)$ es la solución única de $T_n(w,x) = R_n(w,y(w))$ en $X_n(w)$, y para todo w en W, $\{x_n(w)\}$ converge a x (w), la única solución de T (w,x) = y (w).

Demostración. Ya que el esquema de aproximación $\Pi_1 = \{X_n, E_n, R_n\}$ es un esquema estocástico admisible de aproximación (por el teorema 2.1), la demostración se deduce del Lema 2.1, si mostramos que T es un operador estocástico de Propiedad-A. Luego sólo quedaría por demostrar la mensurabilidad de la solución.

Para mostrar que T: W x X →X es de Propiedad A estocástico, sea $\{x_n\}$ acotado y $\parallel T_n(w,x_n(w)) - R_n(w,y(w)) \parallel \to 0$ para $n \to \infty$, donde $x_n(w)$ está en $X_n(w)$ para todo n en N y w en W. Para una y dada y medible en X, resolvemos T (w,x)=y (w) en X. Se sigue de la construcción de R_n que $\parallel x - R_n(w,x) \parallel \to 0$.

Por brevedad escribiremos n por n'. Ahora, ya que T es continuo y muy monótono (y por lo tanto c-extensible) R_n es q-Lipschitz y Π_1 es consisstente, obtenemos (para $n \to \infty$).

$$pc \parallel x_n(w) - R_n(w,x(w)) \parallel \leq \parallel T_n(w,x_n(w)) - T_n(w, R_n(wx)) \parallel$$

$$\leq \parallel T_n(w,x_n(w)) - R_n(w, y(w)) \parallel$$

$$+ \parallel R_n(w, T(w, x)) - T_n(w, R_n(w,x)) \parallel$$

$$\leq \parallel T_n(w,x_n(w)) - R_n(w, y(w)) \parallel$$

$$+ q \| T(w, x) - T(w, R_n(w,x)) \| \to 0.$$

Esto implica que $x_n(w) - R_n(w,x(w)) \to 0$ para $n \to \infty$, y por lo tanto $x_n(w) \to x\ w)$ para todo w en W. Finalmente, la serie $\{x_n\}$ es una sucesión de funciones medibles por el Lema 2.2, y x es el límite de $\{x_n\}$. Luego x es medible. Esto comleta la demostración.

REFERENCIAS

1. A. T. Bharucha Reid, Fixed point theorems in probabilistic analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 641-657.

2. H. W. ERngl and M. Z. Nashed, Stochastic projectional schemes for random linear operator equations of the first and second kinds, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1 (1979), 451-473.

3. H. W. Engl, Random fixed point theorems for mujltivalued mappıng, Pacific J. Math. 76 (1978), 351-360.

4. C. J. Himmelberg, Measurable relations, Funda. Math. 87 (1975), 53-72.

5. K. Kuratowski and C. Ryll Nardzewski, A general theorem on selectors, Bull. Acad. Pol. Sci. 13 (1965), 397-403.

6. W. V. Petryshyn, Nonlinear equations involving noncompact operators, Nonlinear Functional Analysis. Proc. Sympos. Pure Math. (ed. F. Browder), Amer. Math. Soc., Providence, 1970, pp. 206-233.

7. T. L. Saaty, Modern Nonlinear Eauations, Dover Publications, New York, 1981.

8. R.U. Verma, General approximation solvability of nonlinear equations involving A regular operators, Zeitschrif Anal. Anwendungen 13 (1994), 89-96.

9. R.U. Verma, Stochastic approximation solvability of linear random equations involing numerical ranges, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 9 (1996) (to appear).

10. E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Springer Verlag, New York, 1990.