

## ALGORITMOS ITERATIVOS PARA LA APROXIMACION DE PUNTOS FIJOS DE OPERADORES MUY MONOTONOS

Ram U. Verma  
International Publications  
12046 Coed Drive  
Orlando, Florida 32826, U.S.A.

and  
Istituto per la Ricerca di Base  
Division of Mathematics  
I-86075 Monteroduni (IS), Molise, Italy

### RESUMEN

Basándonos en un algoritmo iterativo modificado, se determinan por aproximación los puntos fijos de operadores muy monótonos en un escenario de espacio de Hilbert.

### 1. INTRODUCCION

El teorema de Wittman (7, teorema 2), usando un procedimiento iterativo:

$$(1) \quad x_{n+1} = (1-a_n) x_n + a_n T x_n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

para aproximar los puntos fijos de regiones no expansivas  $T: K \rightarrow K$  de subconjuntos cerrados convexos,  $K$  de un espacio real de Hilbert dentro de si mismo, donde  $\{a_n\}$  es una serie creciente en  $(0,1)$  tal que

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n) = \infty$$

Aquí determinamos aproximadamente los puntos fijos de operadores muy monótonos de la forma  $S = T - U$ , donde  $T$  es muy monótono y continuo de Lipschitz de un conjunto convexo y no vacío  $K$  en un espacio real de Hilbert  $H$ , y  $U$  es continuo de Lipschitz en  $K$ , en un escenario más general, en el sentido que los puntos fijos, a diferencia del caso(7), no están restringidos por algunas condiciones especiales.

Sean  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\| \cdot \|$  la notación respectiva, del producto interno y la norma del espacio de Hilbert  $H$ .

Un operador  $T:H \rightarrow H$  se dice es muy monótono si, para todo  $u, v$  en  $H$ , existe una constante  $r > 0$  tal que

$$(3) \quad \langle T\mu - Tv, u - v \rangle \geq r \|u - v\|^2$$

El operador  $T$  es llamado continuo de Lipschitz si existe una constante  $s > 0$  tal que

$$(4) \quad \|T\mu - Tv\| \leq s \|u - v\| \text{ para toda } u, v \text{ en } H.$$

## 2. RESULTADOS PRINCIPALES

Damos ahora los resultados principales de la aproximación de los puntos fijos de los operadores de la forma  $S = T - U$  basados en un algoritmo iterativo modificado que contiene una cantidad de esquemas iterativos (incluyendo los considerados por el autor(5,6) como casos especiales).

Teorema 1. Sea  $H$  un espacio real de Hilbert y  $K$  un subconjunto convexo, no vacío de  $H$ . Tomemos  $T:K \rightarrow K$  sea muy monótono y continuo de Lipschitz en  $K$  con  $r > 0$  y  $s > 0$  las constantes respectivas de la fuerte monotonía y continuidad de Lipschitz de  $T$ . Sea  $U: K \rightarrow K$  la continua de Lipschitz con la continuidad de Lipschitz  $m > 0$ . Sea

$$F = \{ x \text{ en } K: (I - tS) x = x \}$$

no vacío, y sea  $\{a_n\}$  una serie creciente en  $\{0,1\}$  tal que

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{para toda } n \geq 0.$$

Luego, para cualquier  $x_0$  en  $K$ , la serie

$$(6) \quad x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n (x_n - t(T-U) x) \text{ para } n = 0,1,2,\dots$$

donde  $0 < k = (1 - 2tr + t^2 s^2)^{1/2} = tm < 1$  para toda  $t$  tal que

$0 < t < 2(r-m) / (s^2 - m^2)$  y  $m < r \leq s$ , converge a un elemento  $z$  en  $F$ .

Para  $U=0$ , el Teorema 1 se reduce al

Corolario 1.

Sea  $K$  un subconjunto convexo, no vacío, de un espacio real  $H$  de Hilbert.

Sea  $T: K \rightarrow K$  muy monótono y continuo de Lipschitz con constante correspondiente  $r > 0$  y  $s > 0$ .

Sea  $F = \{x \text{ en } k: (I-tT)x = x\}$  no vacío, y sea  $\{a_n\}$  una serie creciente en  $(0,1)$  tal que

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{para toda } n \geq 0.$$

Luego para una  $x_0$  en  $k$ , la serie

$$(8) \quad x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n(x_n - tTx_n) \quad \text{para } n = 0,1,2,\dots$$

donde  $0 < p = (1-2tr + t^2 s^2)^{1/2} < 1$  para todo  $t$  tal que

$0 < t < 2r/s^2$ , converge a un elemento  $z$  de  $F$ .

Demostración del teorema 1. Para un elemento  $z$  en  $F$ , tenemos

$$\begin{aligned} (9) \quad & \|x_{n+1} - z\| \\ &= \|(1-a_n)x_n + a_n(x_n - t(T-U)x_n) - z\| \\ &= \|(1-a_n)(x_n - z) + a_n(x_n - z - t(T-U)x_n + t(T-U)z)\| \\ &\leq (1-a_n)\|x_n - z\| + a_n\|x_n - z - t(Tx_n - Tz)\| \\ &\quad + a_n t \|Ux_n - Uz\|. \end{aligned}$$

Como  $T$  es muy monótono y continuo de Lipschitz esto implica que

$$\begin{aligned} (10) \quad & \|t(Tx_n - Tz) - (x_n - z)\|^2 \\ &= \|x_n - z\|^2 - 2t \langle Tx_n - Tz, x_n - z \rangle + t^2 \|Tx_n - Tz\|^2 \\ &\leq \|x_n - z\|^2 - 2tr \|x_n - z\|^2 + t^2 s^2 \|x_n - z\|^2 \\ &= (1-2tr + t^2 s^2) \|x_n - z\|^2 \end{aligned}$$

Ahora, aplicando (10) a (9) y usando la continuidad de Lipschitz de U, obtenemos

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \|x_{n+1} - z\| &< \{1 - a_n + (1 - 2tr + t^2 s^2)^{1/2} + tm\} a_n \|x_n - z\| \\
 &= \{1 - (1 - k) a_n\} \|x_n - z\| \\
 &\leq \prod_{j=0}^n \{1 - (1 - k) a_j\} \|x_0 - z\|,
 \end{aligned}$$

donde  $0 < k = (1 - 2tr + t^2 s^2)^{1/2} + tm < 1$  para toda  $t$  tal que

$$0 < t < 2(r-m) / (s^2 - m^2) \text{ y } m < r \leq s. \text{ y una } \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$$

y  $0 < k < 1$ , esto implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n \{1 - (1 - k) a_j\} = 0$ , y como una conclusión,  $\{x_n\}$  converge (fuertemente) a  $z$ . Esto completa la demostración.

Nota 1. Cuando la serie  $\{x_n\}$  es decreciente, el teorema 1 solo es válido para

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

## REFERENCIAS

- (1) B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 957-961.
- (2) W.A. Kirk and Y. Sternfeld, the fixed point property for nonexpansive mappings in certain product spaces, *Houston J. Math.* 10 (1984), 207-214.
- (3) S. Reich, Aproximating fixed points of nonexpansive maps, *PanAmer. Math. J.* 4(2) (1994), 23-28.
- (4) B. E. Rhoades, Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 183 (1994), 118-120.
- (5) R.U. Verma, Iterative algorithms for variational inequalities and associated nonlinear equations involving relaxed Lipschitz operators, *App. Math. Lett.* por publicarse.
- (6) R.U. Verma, Generalized variational inequalities and associated nonlinear equations, *Czechoslovak Math. J.* (por publicarse).
- (7) R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.* 58 (1992), 486-491.