Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales (Caracas).
Vol. L, Nos. 163-164, 1991.

OPERADORES INTEGRALES SINGULARES DE INDICE FINITO EN FUNCIONES DE ESPACIOS DE BANACH.

R.U. Verma

Se obtienen fórmulas determinantes, basadas en modelos de integración referentes a operadores integrales singulares de coeficiente finitos.

INTRODUCCION 1. Las primeras teorías modernas en espacios de Banach para la solución de ecuaciones lineales de Fredholm (I + T) x = x_0 fueron dadas por A.F. Ruston [10] - [12], A. Grothendieck [7] y T. Lezanski [8] . R. Sikorski [13] - [15] modificadas y mejoradas por la teoría de Lezanski, y A. Buraczewski [1] - [6] generalizando esta teoría al caso de operadores de Fredholm con índices no desvanescentes.

Más tarde A. Buraczewski [1] - [6] generalizó aún más al caso de ecuaciones lineales (S + T) x = x_0, donde S es un invariable de Fredholm y T es un operador cuasi-nuclear. Las fórmulas así obtenidas son abstractamente análogas a las fórmulas de Fredholm, y se denominan como de tipo Fredholm. Recientemente, R.U. Verma [16] ha aplicado estas fórmulas usando el modelo de integrales de R. Sikorski [13] en la teoría de operadores integrales singulares de coeficientes de índices no desvanescentes en los espacios de Banach.

En este trabajo se obtienen algunos resultados para los operadores integrales singulares de índices finitos basados en los trabajos de A. Buraczewski [1] - [6] y P. Sikorski [13]. Estas fórmulas pueden ser aplicadas para encontrar la solución de ecuaciones integrales singulares que actúan en funciones de espacios que satisfacen la condición de Hölder.

Consideramos una curva regular con no intersección L en el plano complejo. Designaremos por μ H (L) el espacio de todas esas funciones que satisfacen la condición de Hölder con exponentes $0 < \mu < 1$. Si $0 < \alpha < {}^1/_2\,\mu$, $H^\alpha (L) \supset H^\mu (L)$. El espacio conjugado $\int H^\alpha (L)$ es el mismo. Las funciones x, f, g, v, w, g (con índice n si es necesario) representaran siempre elementos de $H^\alpha (L)$, $\alpha < {}^1/_2\,\mu$.

$H^{\mu}(L)$ es un espacio de Banach de todas esas funciones x que satisfacen la condición de Hölder de índice μ, en L con la norma $\|x\|$ definida del modo siguiente [9]:

$$\|x\| = M + M_o,$$

donde

$$M = \max_{t \in L} |x(t)|, \quad y$$

$$M_o = \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}}$$

Sean a, b $\in H^{\mu}(L)$, donde $0 < \mu < 1$ y $a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad t \in L$. Luego se conoce bien que el operador

$$(1.1) \quad (Sx)(t) = a(t)\,x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t}\, x(\tau)\, d\tau,$$

está bien definido en $H^{\alpha}(L)$, donde $\alpha < \frac{1}{2}\mu$ con valores en $H^{\alpha}(L)$. Lo definimos el operador J por

$$(1.2) \quad (J\,x)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t}\, x(\tau)\, d\tau,$$

luego el operador S puede escribirse en forma compacta $S = aI + bj$, donde I es el operador de identidad en $H^{\alpha}(L)$.

Se sabe bien que el operador J está limitado y satisface $J^2 = I$ en $H^{\alpha}(L)$. El operador $S = aI + bj$ es denominado un operador integral singular que es un operador de Fredholm sin índice desvanescente.

Sea $T_a = aJ - Ja$ y $T_b = bJ - Jb$. Luego es fácil mostrar que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$(1.3) \qquad (aI + bJ)(aI - bJ) = (a^2 - b^2)\,I - bT_a + bT_bJ$$
$$= (a^2 - b^2)\,I + T_1$$

$$(1.4)\qquad (aI - bJ)(aI + bJ) = (a^2 - b^2)\,I + bT_a + bT_bJ = (a^2 - b^2)\,I + T_{11}$$

y que T_1 y T_{11} son operadores compactos.

Luego, si

(i) $T_1 = 0$, entonces (S) = ind $(aI + bj) \geq 0$,

(ii) $T_{11} = 0$, entonces ind (S) = ind $(aI + bj) \leq 0$.

Sigue de esto que el operador

$$(1.5)\qquad Q = \frac{1}{(a^2 - b^2)}\,(aI - bJ)$$

es casi inverso de S, esto es, cuando el orden r(S) = 0.

En el presente trabajo nos restringimos al caso r(S) = 0 y ind(S) = d ≥ 0.

Sea $T(t, \tau)$ un núcleo en L x L tal que la integral del operador T esté definido por la fórmula

$$(1.6)\qquad (Tx)(t) = \frac{1}{\pi^{i}} \int_L T(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

da $H^{\alpha}(L) \rightarrow H^{\alpha}(L)$.

Entonces tenemos el operador integral singular S + T con referencia en la integral singular de la ecuación [9]:

$$(1.7)\qquad a(t)\,x(t) + \frac{b(t)}{\pi^{i}} \int_L \frac{x(\tau)}{\tau^{-t}}\, \tau + \frac{1}{\pi^{i}} \int_L \underline{T(t,}\ \tau)\, x(\tau)\, d\tau = x_0(t),$$

o más breve

$$(S + T)\,x = x_0.$$

El operador T ε B $(H^{\alpha}(L))$ - es espacio de los operadores lineales, cuando $0 < \alpha < \frac{1}{2}\mu$.

Definamos por una función bilineal $H^{\alpha}(L) \times H^{\alpha}(L)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\mu$, por la fórmula.

(1.8) $$vx = \int_L v(t).x(t)\, dt$$

sea T (s,s) una función L x L tal que

(1.9) $$F(I) = \int_L T(s,s)\, ds$$, existe, y tal que

(1.10) $$F(H) = \int_L \int_L T(t,s)\, H(s,t)\, ds\, dt,$$

Para cada operador integral H definido por

$$H(s,t) = x(s)\, v(t).$$

Luego el operador T es el operador integral determinado por el modelo T (s,t):

(1.11) $$vTx = \int_L \int_L v(s)\, T(s,t)\, x(t)\, ds\, dt,$$

y

$$(vT)(t) = \int_L v(s)\, T(s,t)\, ds,$$

$$(Tx)(s) = \int_L T(s,t)\, x(t)\, dt.$$

Sea $S = aI + bj$ un operador integral singular de orden $r(S) = 0$ e índice $d(S) = d \geq 0$, y sea Q una integral casi-inversa de S. Sea $e_1,\dots,e_d$, un sistema completo de soluciones de $Sx = 0$. Sea el operador integral singular $S + T$ de orden $r(S + T) = r$ e índice $d(S + T) = d > 0$.

2. En la siguiente sección, encontraremos el operador determinante del sistema $S = aI + bj$ usado por Sikorski [13]:

TEOREMA 1. Sea $S = a\,I + bJ$ un operador integral singular de orden $r(S) = 0$ e índice $d(S) = d \geq 0$. Sea Q una integral casi-inversa de S, y sea $e_1,\dots,e_d$, un sistema completo de soluciones de $Sx = 0$.

Luego la secuencia

(2.1) $\theta_0, \theta_1, \dots$

definida por

$$(2.2)\quad \theta_n \begin{pmatrix} v_1, \ldots, v_{n+d} \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} = \int_L \cdots \int_L$$

$$\begin{matrix} Q(s_1,t_1)\ldots Q(s_1,t_n) & \delta(s_1,u_1)\ldots\delta(s_1,u_d) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Q(s_{n+d},t_1)\ldots Q(s_{n+d},t_n) & .\ \delta(s_{n+d},u_1)\ldots\delta(s_{n+d},u_d) \end{matrix}$$

$$v_1(s_1)\ldots v_{n+d}(s_{n+d}) \cdot x_1(t_1)\ldots x_n(t_n) \cdot e_1(u_1)\ldots e_d(u_d)$$

$$ds_1\ldots ds_{n+d} \cdot dt_1\ldots dt_n \cdot du_1\ldots du_d$$

es un sistema determinante para el operador $S = aI + bJ$.

Además si $\left\{\overset{*}{\theta}_n\right\}$ es cualquier otro determinante del sistema para S, luego existe un escalar $c \neq 0$ tal que

$$(2.3)\quad \overset{*}{\theta}_n = c\theta_n \ , \text{ por } n=0,1,\ldots$$

TEOREMA 2. Sea $S = aI + bJ$ un operador integral singular de orden $r(S)=0$ e índice $d(S)=d > 0$. Sea $\theta_0, \theta_1, \ldots$, un sistema de operadores S definidos por (2.2). Para cualquier integral casi-núcleo F, sea

$$(2.4)\quad D_{n,m}(F) = \frac{1}{m!} \quad F^{o} \ldots F^{o}.\theta_{n+m}$$

$$= \frac{1}{m!} \int_L \cdots \int_L \theta_{n,m} \begin{pmatrix} s_1, \ldots\ldots\ldots, s_{n+d} \\ t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_d \end{pmatrix}$$

$$v_1(s_1)\ldots v_{n+d}(s_{n+d}) \cdot x_1(t_1)\ldots x_n(t_n) \ .$$

$$e_1(u_1)\ldots e_l(u_d) \cdot ds_1\ldots ds_{n+d} \cdot dt_1\ldots dt_n$$

$$du_1\ldots du_d$$

donde

$$\theta_{n,m} \begin{pmatrix} s_1, \ldots\ldots\ldots, s_{n+d} \\ t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_d \end{pmatrix} = \int_L \cdots \int_L$$

$$\begin{array}{c} Q(s_1,t_1)\ldots Q(s_1,t_n) \quad Q(s_1,r_1)\ldots Q(s_1,r_m) \quad \delta(s_1,u_1)\ldots\delta(s_1,u_d) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q(s_{n+d},t_1)\ldots Q(s_{n+d},t_n) \quad Q(s_{n+d},r_1)\ldots Q(s_{n+d},r_m) \quad \delta(s_{n+d},u_1)\ldots\delta(s_{n+d},u_d) \\ QT(r_1,t_1)\ldots QT(r_1,t_n) \quad QT(r_1,r_1)\ldots QT(r_1,r_m) \quad T(r_1,u_1)\ldots T(r_1,u_d) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ QT(r_m,t_1)\ldots QT(r_m,t_n) \quad QT(r_m,r_1)\ldots QT(r_m,r_m) \quad T(r_m,u_1)\ldots T(r_m,u_d) \end{array}$$

$$dr_1\ldots dr_m$$

donde $Q(s,t)$, $QT\,(S,T)$ y $T\,(s,t)$ son núcleos de los operadores Q, QT y T respectivamente.

Luego las series

$$(2.5) \quad D_n(F) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{n,m}(F)$$

convergen para $n = 0,1,\ldots$, y la secuencia

$$(2.6) \quad D_0, D_1, \ldots ,$$

es un sistema determinante para el operador $S + T$.

DEMOSTRACION. Sea θ_0, θ_1, ..., un sistema determinante para el operador $S=aI+bJ$, definido por (2.1). luego

$$\theta_k \begin{pmatrix} v_1, \ldots, v_{k+d} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix} = \int_L \cdots \int_L$$

$$\begin{array}{c} Q(s_1,t_1)\ldots Q(s_1,t_k) \quad \delta(s_1,u_1)\ldots\delta(s_1,u_d) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q(s_{k+d},t_1)\ldots Q(s_{k+d},t_k) \quad .\,\delta(s_{k+d},u_1)\ldots\delta(s_{k+d},u_d) \end{array}$$

$$.\ v_1(s_1)\ldots v_{k+d}(s_{k+d})\ .\ x_1(t_1)\ldots x_k(t_k)\ .\ e_1(u_1)\ldots e_d(u_d)\ .$$

$$.\ ds_1\ldots ds_{k+d}\ .\ dt_1\ldots dt_k\ .\ du_1\ldots du_d\ .$$

Por lo tanto, $k = m + n$, llegamos a

$$D_{n,m}(F) \begin{pmatrix} v_1, \ldots, v_{n+d} \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{m!} \int_L \cdots \int_L$$

$$Q(s_1,t_1)\dots Q(s_1,t_{n+n}) \quad \delta(s_1,u_1)\dots\delta(s_1,u_d)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q(s_{n+d+m},t_1)\dots Q(s_{n+d+m},t_{n+m}) \,.\, \delta(s_{n+d+m},u_1)\dots\delta(s_{n+d+m},u_d)$$

$$.\ v_1(s_1)\dots v_{n+d}(s_{n+d})\ .\ x_1(t_1)\dots x_n(t_n)\ .$$

$$.\ e_1(u_1)\dots e_d(u_d)\ .\ T(t_{n+1},s_{n+d+1})\dots T(t_{n+m},s_{n+d+m})\ .$$

$$.\ ds_1\dots ds_{n+d+m}\ .\ dt_1\dots dt_{n+m}\ .\ du_1\dots du_d$$

$$= \frac{1}{m!}\int_L \cdots \int_L \begin{matrix} Q(s_1,t_1)\dots Q(s_1,t_{n+m}) & \delta(s_1,u_1)\dots\delta(s_1,u_d) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q(s_{n+d},t_1)\dots Q(s_{n+d},t_{n+m}) & \delta(s_{n+d},u_1)\dots\delta(s_{n+d},u_d) \\ QT(t_{n+1},t_1)\dots QT(t_{n+1},t_{n+m}) & T(r_{n+1},u_1)\dots T(r_{n+1},u_d) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ QT(t_{n+m},t_1)\dots QT(t_{n+m},t_{n+m}) & T(r_{n+m},u_1)\dots T(r_{n+m},u_d) \end{matrix}$$

$$.\ v_1(s_1)\dots v_{n+d}(s_{n+d})\ .\ x_1(t_1)\dots x_n(t_n)\ .$$

$$.\ e_1(u_1)\dots e_d(u_d)\ .\ ds_1\dots ds_{n+d}\ .$$

$$.\ dt_1\dots dt_{n+1}\dots dt_1\dots dt_{n+m}\ .\ du_1\dots du_d \quad .$$

Reemplazado $t_{n+1},\dots, t_{n+m}$ por $r_1\dots,r_m$, obtenemos la requerida fórmula.
OBSERVACION 1. El determinante sistema D_0, $D_1,\dots$, definido por (2.6), puede también obtenerse aplicando el sistema determinante $\left\{\bar{D}_n(QF)\right\}$ para el operador I + QT.
OBSERVACION 2. El determinante del sistema $\left\{D_n\right\}$ obtenido para el operador S + T puede aplicarse para obtener el determinante de Fredholm del sistema $\left\{D^*_n\right\}$ para el operador S + T usando la fórmula:

$$D^*_n \begin{pmatrix} v_1,\dots,v_{n+d} \\ x_1,\dots,x_n \end{pmatrix} = D_n \begin{pmatrix} v_1M,\dots,v_{n+d}M \\ x_1,\dots,x_n \end{pmatrix}$$

donde

$$D_n \begin{pmatrix} v_1M,\ldots,v_{n+d}M \\ x_1,\ldots,x_n \end{pmatrix} = (-1)^d \; D_n \begin{pmatrix} v_1,\ldots,v_{n+d} \\ Nx_1,\ldots,Nx_n \end{pmatrix}$$

y $\quad M = Q(S+T) - I \quad , N = (S+T)Q - I = TQ$

REFERENCIAS

1. A. Buraczewski, The determinant theory of generalized Fredholm operators., Studia Math., 22 (1963), pp. 265-307.
2. A. Buraczewski, Formulae of Fredholm type for solutions of linear equations with generalized Fredholm operators., Studia Math., 32 (1969), pp. 1-8.
3. A. Buraczewski, Determinant systems for composite of generalized Fredholm operators., Studia Math., 34 (1970), pp. 197-207.
4. A. Buraczewski, On certain property of determinant systems, Colloq. Math., 10 (1963), pp. 325-330.
5. A. Buraczewski, Remark on formulae of the Fredholm type, Bull. Acad. Polon. Sci., 19 (1971), pp. 135-140.
6. A. Buraczewski, Generalization of formulae of Fredholm type, Colloq. Math., 31 (1974), pp. 107-113.
7. A. Grothendieck, La theorie de Fredholm, Bull. de la Societe Math. de France, 84 (1956), pp. 319-384.
8. T. Lezanski, The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, Studia Math., 13 (1953), pp. 244-276.
9. N. Muskhelishvili, Singular integral equations, Groningen, Holland (1953).
10. A. F. Ruston, On the Fredholm theory of integral equations belonging to the trace class of a general Banach space, Proc. Lond. Math. Soc., 53 (1951), pp. 109-124.
11. A. F. Rouston, Direct product of Banach spaces and linear functional equations, Proc. Lond. Math. Soc., 1 (1951), pp. 327-384.
12. A. F. Rouston, Operators with a Fredholm theory, Jour. Lond. Math. Soc., 29 (1954), pp. 318-326.
13. R. Sikorski, Remarks on Lezanski's determinants, Studia Math., 20 (1961), pp. 145-161.
14. R. Sikorski, The determinant theory in Banach spaces, Colloq. Math., 8 (1961), pp. 141-198.
15. R. Sikorski, On Lezanski's determinant of linear equations in Banach spaces, Studia Math., 14 (1953), pp. 24-28.
16. R. U. Verma, Determinant theory of singular integral equations, Demonstratio Math., 13 (1980), pp. 65-75, No. 1.

University of Central Florida, Orlando, FL 32816, U.S.A.