Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales (Caracas)
Vol. XLIX, Nos. 155 - 156, 1989

DE LAS SERIES DE FOURIER DE RANGO MEDIO PARA LAS FUNCIONES H DE FOX

N. C. Jain (*)

INTRODUCCION

Las series de Fourier han sido usadas extensamente para resolver problemas en Matemáticas Aplicadas, Ingeniería y Física Aplicada.

Recientemente MacRobert [4], Bajpai [1], Saxena [7] y otros han obtenido series de Fourier para las funciones geométricas generalizadas.

El objeto de este estudio consiste en obtener las series de Fourier de rango medio del seno y del coseno de la misma función H, lo cual no había sido intentado hasta ahora. Se cree que los resultados son nuevos y que pueden ser útiles en la solución de problemas de conducción de calor, propagación de ondas y teoría potencial.

Por brevedad y en todo el estudio, los símbolos:

$$(a_p)\ ,\quad ((a_p,\ A_p))\ ,\quad (a\pm b,h),\quad \Delta(n,a)\ ,\quad \Delta(n,\pm a)\ ,$$

se usan para representar respectivamente el conjunto de parámetros :

$$a_1, a_2, \ldots, a_p\ ,\ (a_1,\ A_1),\ (a_2,\ A_2),\ldots,\ (a_p,\ A_p),(a+b,\ h)\ ,(a-b,\ h).$$

$$\frac{a}{n}\ ,\ \frac{a+1}{n}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{a+n-1}{n}\ ,\qquad \Delta(n,+a)\ ,\ \Delta(n,-a)$$

y además:

$$\mu=\sum_{j=1}^{q} B_j-\sum_{j=1}^{q} A_j\quad ,\ \lambda=\sum_{j=1}^{m} B_j-\sum_{j=m+1}^{q} B_j+\sum_{j=1}^{n} A_j-\sum_{j=n+1}^{p} A_j$$

(*) Department of Mathematics, University of Science and Technology, Port Harcourt (Nigeria)

La función H [3, p 408] es definida y representada por:

$$(1.1)\quad H^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}((a_p, A_p))\\ ((b_q, B_q))\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j - B_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+B_j s)\prod_{j=n+1}^{n}\Gamma(a_j - A_j s)}\, z^s\, ds$$

donde los productos vacíos se representan como 1 , y donde:

$$1 \leqq m \leqq q \qquad 0 \leqq n \leqq p$$

A_j ,$(j=1,2,\ldots, p)$, B_j ,$(j=1,2,\ldots, q)$ son números positivos.

El contorno L en el plano complejo s es del tipo de Mellin - Barnes que se extiende desde $-i\infty$ hasta $+i\infty$ con indentaciones si es necesario, en forma tal que los polos de :

$$\Gamma(b_j - B_j s)\ ,\ j=1,\ 2\ldots,\ m$$

quedan a la derecha de L, y los polos de

$$\Gamma(1-a_j+A_j s)\ ,\ j=1,2,\ldots,\ n$$

quedan a la izquierda de L.

Los diferentes parámetros se restringen de tal forma que estos polos son todos simples y ninguno de ellos coincide. Queda excluído tácitamente el punto $z=0$

La integral en (1.1) converge absolutamente si :

$$|\arg z| < {}^1\!/_2\, \lambda\pi \qquad \text{y} \qquad \lambda > 0$$

La expansión asintótica y la continuación analítica de la función H ha sido analizada por Braaksma [2].

2. INTEGRALES

Las siguientes integrales se usan para demostrar los resultados:

$$(2.1)\quad \int_0^a \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi \beta z}{a}\, H^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\lambda z}{a}\right)^{2h} \middle| \begin{matrix}((a_p, B_p))\\ ((b_q, B_q))\end{matrix}\right] dz$$

$$= \frac{a}{2^{\alpha}}\operatorname{sen}\frac{\lambda\beta}{2} H^{m,\,n+1}_{p+1,\,q+2}\left[\frac{t}{4^h} \middle| \begin{matrix}(-\alpha,\,2h),((a_p,\,A_p))\\ ((b_q,\,B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm\beta}{2},\,h\right)\end{matrix}\right]$$

donde $0 \leqq n \leqq p, \quad 1 \leqq m \leqq q$

$R(\alpha + 2hb_j/B_j) > -1\ ,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$

$h > 0,$

$\mu \geqq 0$

$\lambda > 0$

$|\operatorname{arctg} t| < {}^1/_2\lambda\pi$

$$(2.2)\quad \int_0^a \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos\frac{\pi \beta z}{a}\, H^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\lambda z}{a}\right)^{2h} \middle| \begin{matrix}((a_p, B_p))\\ ((b_q, B_q))\end{matrix}\right] dz$$

$$= \frac{a}{2^{\alpha}}\cos\frac{\pi\beta}{2} H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\frac{t}{4^h} \middle| \begin{matrix}(-\alpha,\,2h),((a_p,\,A_p))\\ ((b_q,\,B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm\beta}{2},\,h\right)\end{matrix}\right]$$

donde $0 \leqq n \leqq p, \quad 1 \leqq m \leqq q$

$R(\alpha + 2hb_j/B_j) > -1\ ,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$

$h > 0,$

$\mu \geqq 0$

$\lambda > 0$

$|\operatorname{arctg} t| < {}^1/_2\lambda\pi$

Estas dos integrales pueden ser obtenidas de ([5], pag 38, (2.8.5) al igualar la parte real y la imaginaria después de fijar

$$\delta = i\beta, \qquad \nu = \alpha + 1 \qquad \theta = \frac{\pi z}{2}$$

3. SERIES DE FOURIER DE RANGO MEDIO

En esta sección, se han establecido las series de Fourier de rango medio del seno y del coseno en el intervalo $(0, a)$, usando para ello respectivamente las integrales (2.1) y (2.2) y la ortogonalidad de las funciones del seno y del coseno. Los resultados principales son los siguientes:

$$(3.1)\quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right) H^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\pi z}{n}\right)^{2h}\,\middle|\,\begin{matrix}((a_p, B_p))\\((b_q, B_q))\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha-1}}\sum_{r=1}^{\infty} H^{m,\,n+1}_{p+1,q+2}\left[\frac{t}{4^h}\,\middle|\,\begin{matrix}(-\alpha,\ 2h),((a_p,\ A_p))\\((b_q,\ B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm r}{2},h\right)\end{matrix}\right]\operatorname{sen}\frac{\pi r}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi r z}{a}$$

donde $\quad R(\alpha)>0 \qquad 0 \leqq z \leqq a$

$R(\alpha+2hb_j/B_j) > -1$, $j = 1, 2, \ldots, m,$

$h>0, \quad \mu \geqq 0 \quad \lambda>0 \quad |\operatorname{arctg} t| < {}^1/_2\lambda\pi$

$$(3.2)\quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right) H^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}\right)^{2h}\,\middle|\,\begin{matrix}((a_p, B_p))\\((b_q, B_q))\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha-1}}\sum_{r=0}^{\infty} H^{m,\,n+1}_{p+1,q+2}\left[\frac{t}{4^h}\,\middle|\,\begin{matrix}(-\alpha,\ 2h),((a_p,\ A_p))\\((b_q,\ B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm r}{2},h\right)\end{matrix}\right]\cos\frac{\pi r}{2}\cos\frac{\pi r z}{a}$$

donde $\quad R(\alpha)>0 \quad 0 \leqq z \leqq a$, $h>0$ (entero positivo)

$R(\alpha+2hb_j/B_j) > -1$, $j = 1, 2, \ldots, m,$

$\mu \geqq 0 \quad \lambda>0 \quad |\operatorname{arctg} t| < {}^1/_2\lambda\pi$

Demostración de (3.1). Sea:

$$f(z)=\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)H_{p,q}^{m,n}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}\right)^{2h}\middle|\begin{matrix}((a_p,B_p))\\((b_q,B_q))\end{matrix}\right]=$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}k_r\ \operatorname{sen}\frac{\pi r z}{a}$$

donde k_r es constante y $f(z)$ es continua y de variación acotada en el intervalo $(0,a)$.

Se multiplican los los dos lados de (3.3) por sen $(\pi\beta z/a)$ y se integra con respecto a z. Se obtiene:

$$\int_0^a \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\beta z}{a}\right)H_{p,q}^{m,n}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}\right)^{2h}\middle|\begin{matrix}((a_p,\ A_p))\\((b_q,\ B_q))\end{matrix}\right]dz$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}k_r\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi r z}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\beta z}{a}\right)dz$$

Usando (2.1) y la propiedad de ortogonalidad de la función seno, se obtiene:

$$k_r=\frac{1}{2^{\alpha-1}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi r}{2}\right)H_{p+1,q+2}^{m,n}\left[\frac{t}{4^h}\middle|\begin{matrix}(-\alpha,\ 2h),((a_p,\ A_p))\\((b_q,\ B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm r}{2},h\right)\end{matrix}\right]$$

Substituyendo el valor de k_r en (3.3), se obtiene el resultado (3.1)

Demostración de (3.2). Sea:

$$f(z)=\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)H_{p,q}^{m,n}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}\right)^{2h}\middle|\begin{matrix}((a_p,\ A_p))\\((b_q,\ B_q))\end{matrix}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}k_0+\sum_{r=1}^{\infty}k_r\cos\left(\frac{\pi r z}{a}\right)$$

donde k_0 y k_r son constantes.

Al multiplicar los dos lados de (3.4) por $\cos(\pi\beta z/a)$, e integrando con respecto a z desde 0 hasta a, usando (3.1) y la propiedad ortogonal de las funciones coseno, se obtiene:

$$(3.5)\quad k_r=\frac{1}{2^{\alpha-1}}\cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)H^{m,n}_{p+1,q+2}\left[\frac{t}{4^h}\left|\begin{matrix}(-\alpha,\ 2h),((a_p,\ A_p))\\ ((b_q,\ B_q)),\left(\frac{-\alpha\pm r}{2},h\right)\end{matrix}\right.\right]$$

Interpretando (3.4) con (3.5), se obtiene el resultado (3.2).

4. CASOS PARTICULARES

(a) Haciendo $A_j=B_k=1$ $(j=1,2,\ldots,p,\ k=1,2,\ldots,q)$ en (3.1) y (3.2), se obtiene la serie de Fourier de rango medio para la función Meijer G [6]

$$(4.1)\quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)G^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{pz}{a}\right)^{2h}\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi h}}\sum_{r=1}^{\infty}G^{m,\,n+2h}_{p+2h,\,q+2h}\left[t\left|\begin{matrix}\Delta(2h,-\alpha),\ (a_p)\\ (b_q),\Delta\left(h,\frac{-\alpha\pm r}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\operatorname{sen}\frac{\pi r}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi r z}{a}$$

donde

$R(\alpha+2hb_j)>-1,\ j=1,2,\ldots,m$	$0\leqq z\leqq a$
$(m+n)>\tfrac{1}{2}(p+q)$	$R(\alpha)>0$
$\lvert\arg t\rvert<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$	h es entero positivo

$$(4.2)\quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{\pi z}{a}\right)G^{m,n}_{p,q}\left[t\left(\operatorname{sen}\frac{pz}{a}\right)^{2h}\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi h}}\sum_{r=1}^{\infty} G^{m,\, n+2h}_{p+2h,\, q+2h}\left[t\left|\begin{matrix}\Delta(2h,-\alpha),\ (a_p)\\ (b_q),\Delta\left(h;\dfrac{-\alpha\pm r}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\cos\frac{\pi r}{2}\cos\frac{\pi r z}{a}$$

donde $R(\alpha+2hb_j)>-1,\ j=1,2,\ldots,m$

$(m+n)>{}^1\!/_2(p+q)$ $\qquad 0\leqq z\leqq a$

$|\arg t|<(m+n-{}^1\!/_2p-{}^1\!/_2q)\pi,$ $\qquad R(\alpha)>0$

$R(\alpha)>0$ $\qquad h$ es entero positivo

En vista de las propiedades de la función H (%5&, pag 10ü12), con parámetros adecuados en (3.1) y (3.2), se pueden obtener como casos particulares las series de Fourier de rango medio del seno y del coseno para la función hipergeométrica de Wright, la función G de Meijer, la función Bessel generalizada de Maitland, las funciones hipergeométricas, las de Bessel, Legendre, Whiltaker y otras funciones relacionadas.

REFERENCIAS

[1] *Bajpai S. D.* "Fourier Series of generalized hypergeometric functions". (Proc. Cam. Phil. Soc., 65 (1969), pp 703 - 707).

[2] *Braaksma, B.L.J.* "Asymptotic expansions and analytic continuation for a class of Barnes integrals ". (Compositio Math. 15 (1963), pp 239-341)

[3] *Fox, C.* "The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels ". (Trans. Ame. Math. Soc. 98 (1961), pp. 395-429)

[4] *McRobert, T. M.* "Fourier series for E-functions". (Math. z. 75 (1961), pp. 79-82)

[5] *Mathai, A. M. and Saxena, R.K.* The H-function with applications in Statistics and other disciplines. Wiley - Eastern ltd, New Delhi (1976)

[6] *Meijer, C.S.* "On the G-functions I - VIII (Nederl. Akad. Wetenach. Proc. Sec A. 49. (1946), pp. 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175)

[7] *Saxena, R. K.* "Definite integrals involving Fox' H-function, (Acta Mexicana ci. Tecn. 5 (1) (1971), pp. 6-11)