Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales (Caracas)
Vol. XLVII, Nos. 149-150. 1987

ESPACIOS BITOPOLOGICOS R_0

S. N. Maheshwari y P. C. Jain (*)

1. INTRODUCCION

Un subconjunto S de un espacio bitopológico $[X,P,Q]$ es semi abierto [1] si para $x \in S$ existe un conjunto $P-$abierto U tal que $x \in U \subset S$ o un conjunto $Q-$abierto V tal que $x \in V \subset S$. Todo $P-$abierto ($Q-$abierto) es cuasiabierto. Cada conjunto cuasiabierto en $[X,P,Q]$ es la unión de un conjunto $P-$abierto y de un un conjunto $Q-$abierto [1]. Por lo tanto, es claro que la unión cualquiera de conjuntos es cuasiabierto. El complemento de conjuntos cuasiabiertos es cuasicerrado [1]. En un espacio $[X,P,Q]$, $P-cl\ (A) \cap Q-cl(A)$ es la cuasiclausura de A, donde $P-cl(A)$ indica la clausura de A con respecto a la topología de P. Indicaremos la cuasiclausura de A por $qcl(A)$, y si A es el singular $\{x\}$ lo abreviamos como $qcl(x)$. $qcl(A)$ es el conjunto más pequeño cuasicerrado que contiene A [1]. A lo largo de esta nota, $X \sim A$ indica el complemento de A en X.

2. PRELIMINARES

Observación 1. $qcl(A) = \cap\{F/F$ es cuasicerrado $A \subset F\}$

Observación 2. A es cuasicerrado si y solo si $A = qcl(A)$.

Observación 3. Sea $[A^*, P^*, Q^*]$ un subespacio de un espacio bitopológico $[X,P,Q]$ y $A \subset X$. Si A es cuasiabierto en X, luego $A \cap X^*$ es cuasiabierto en X^*.

Las anteriores observaciones pueden verse fácilmente.

Lema 1: Sea A un subconjunto de un espacio bitopológico $[X,P,Q]$. Luego $x \in qcl(A)$ si y solo si para todo conjunto U cuasiabierto que contiene a x, $U \cap A \neq \emptyset$.

(*) Department of Mathematics, University of Saugar. *Sagar, M. P. INDIA 470.003.*

Demostración: *Es necesario.* Sea U un conjunto cuasiabierto tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Luego $X \sim U$ es cuasicerrado y contiene A. En consecuencia $qcl(A) \subset X \sim U$. Por tanto, $x \notin qcl(A)$.

Es suficiente. Si $x \notin qcl(A)$, entonces existe un conjunto cuasicerrado F tal que $A \subset F$, y $x \notin F$. Por lo tanto, $X \sim F$ es un conjunto cuasiabierto que contiene a x y es disjunto de A.

3. ESPACIOS BITOPOLOGICOS R_0

Definición 1. Un espacio bitopológico $[X,P,Q]$ es R_0 (en el sentido bitopológico) si para cada conjunto cuasiabierto G, $x \in G$ implica que $qcl(x) \subset G$.

Teorema 1: Cada espacio pareado R_0 [2, pág 62], $[X,P,Q]$ es R_0. (en el sentido bitopológico).

Demostración: Sea G un conjunto cuasiabierto y $x \in G$. Existe un conjunto $P-$abierto W y un $Q-$abierto V tal que $G = W \cup V$. Si $x \in W$ luego $Q-cl(x) \subset W$, ya que X es apareado R_0. Y así $qcl(x) \subset W$. Por consiguiente, $qcl(x) \subset G$. El caso $x \in V$ es similar. Por lo tanto, $[X,P,Q]$ es R_0 (en el sentido bitopológico).

Observación 4. La inversa puede ser falsa por:

Ejemplo 1. Sean

$X = \{a,b,c\}$, $\quad P = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$, $\quad Q = \{\emptyset,\{c\},\{b,c\},X\}$.

Luego el espacio $[X,P,Q]$ es R_0 (en el sentido bitopológico) pero no es apareado R_0.

Definición 2. En un espacio $[X,P,Q]$ definimos

$$qker(x) = \cap\{G/G \text{ es cuasiabierto}, x \in G\}$$

Lema 2: $qker(x) = \{y/x \in qcl(y)\}$. La demostración es fácil.

Teorema 2. En el espacio $[X,P,Q]$ las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a). $[X,P,Q]$ es R_0 (en el sentido bitopológico).

(b). Para $x \in X$, $qcl(x) \subset qker(x)$.

(c). Para $x,y \in X$, $y \in qker(x) \Leftrightarrow x \in qker(y)$.

(d). Para $x,y \in X$, $y \in qcl(x) \Leftrightarrow x \in qcl(y)$.

(e). Para un conjunto cuasicerrado F y $x \in F$ existe un conjunto G cuasiabierto tal que $x \notin G$, $F \subset G$.

(f). Para cualquier conjunto cuasicerrado F:

$$F = \cap\{G/G \text{ es cuasiabierto, } F \subset G\}$$

(g). Cada conjunto cuasiabierto G es una unión de conjuntos cuasicerrados contenidos en G.

(h). Para cada conjunto cuasicerrado F, $x \notin F$ implica $qcl(x) \cap F = \emptyset$.

Demostración: $(a) \to (b)$. Para $x \in X$, $qker(x) = \cap\{G/G$ es cuasiabierto, $x \in G\}$. Pero como X es R_0 (en el sentido bitopológico), cada conjunto cuasiabierto G que contenga x contiene a $qcl(x)$. Luego, $qcl(x) \subset qker(x)$.

$(b) \to (c)$. Si $y \in qker(x)$ luego $x \in qcl(y)$, ahora por (b), $x \in qker(y)$, de modo análogo, $x \in qker(y)$ implica $y \in qker(x)$.

$(c) \to (d)$. Para $x,y \in X$, se tiene: $y \in qcl(x) \Leftrightarrow x \in qker(y)$. Pero por (c), $x \in qker(y) \Leftrightarrow y \in qker(x)$. Como $y \in qker(x) \Leftrightarrow x \in qcl(y)$, entonces (d) se verifica.

$(d) \to (e)$. Sea F cuasicerrado y $x \notin F$. Luego $y \in F \Rightarrow qcl(y) \subset F \Rightarrow x \notin qcl(y) \Rightarrow y \notin qcl(x)$ por (d). Por lo tanto, existe un conjunto cuasiabierto G_y tal que $y \in G_y$ y $x \notin G_y$. Sea $G = \bigcup_{y \in F} G_y$. Luego G es cuasiabierto tal que $x \in G$ y $F \subset G$.

$(e) \to (f)$. Sea F un conjunto cuasicerrado y supongamos que $H = \cap\{G/G$ es cuasiabierto, $F \subset G\}$. Claramente, $F \subset H$. Sea $x \notin F$. Luego por (e), existe un conjunto cuasiabierto G tal que $x \notin G$ y $F \subset G$. Por lo tanto, $x \notin H$. Luego $F = H$.

$(f) \to (g)$. Es obvio.

$(g) \to (h)$. Sea F un conjunto cuasicerrado, $x \in F$. Luego $X - F$ es cuasiabierto y contiene x. Por (g), hay un conjunto cuasicerrado H tal que $x \in H \subset G$. Por lo tanto, $qcl(x) \subset G$. Luego $qcl(x) \cap F = \emptyset$.

$(h) \to (a)$. Es obvio.

Teorema 3: Sea $[X,P,Q]$ un R_0 (en el sentido bitopológico) y $x,y \in X$. Luego $qcl(x)$ es igual a $qcl(y)$ o son disjuntos.

Supongamos que $qcl(x) \cap qcl(y) \neq \emptyset$ y sea $z \in qcl(x) \cap qcl(y)$. Ahora $z \in qcl(x) \Rightarrow qcl(z) \subset qcl(x)$. Por el teorema 2.(d), $z \in qcl(x) \Rightarrow x \in qcl(z)$, lo que implica $qcl(x) \subset qcl(z)$. Y así $qcl(x) = qcl(z)$. De modo similar $qcl(y) = qcl(z)$. Por lo tanto, $qcl(x) = qcl(y)$.
En vista del Teorema 2(c), tenemos de modo similar,

Teorema 4: Sea $[X,P,Q]$ un R_0 (en el sentido bitopológico) y $x,y \in X$. Luego $qker(x)$ es igual a $qker(y)$ o son disjuntos.

Teorema 5: La propiedad de ser R_0 (en el sentido bitopológico) es hereditaria.

Demostración: Sea $[X,P,Q]$ un R_0 (en el sentido bitopológico) y sea $[Y,P^*,Q^*]$ un subespacio de X. Sea F^* un conjunto cuasicerrado en Y. Sea $x \in Y$ tal que $x \notin F^*$. Luego existe un conjunto P^*-cerrado A y un Q^*-cerrado B tal que $F^* = A \cap B$.

Ahora existe un conjunto $P-$cerrado F tal que $A = F \cap Y$ y un conjunto $Q-$cerrado H tal que $B = H \cap Y$. Por lo tanto, $F^* = (F \cap H) \cap Y$. Ahora $x \in Y$ y $x \notin F^* \Rightarrow x \notin F \cap H$. Es claro que $F \cap H$ es cuasicerrado en X.

Por hipótesis, el espacio bitopológico $[X,P,Q]$ es R_0 (en el sentido bitopológico). Por lo tanto, por el teorema 2.(e), existe un conjunto cuasiabierto G en X tal que $F \cap H \subset G$ y $x \notin G$. Así $Y \cap G = G^*$ es un conjunto cuasiabierto en Y tal que $x \notin G^*$, y $F^* \subset G^*$.

Por consiguiente, por el teorema 2.(e), $[Y,P^*,Q^*]$ es R_0 (en el sentido bitopológico).

REFERENCIAS

[1] *M. C. Datta.* Contribution to the theory of bitopological spaces, Ph.D. dissertation. B.I.T. Pilani (India) 1971.

[2] *M . G. Murdeshwar and S. A. Naimpally.* Quasiuniform topological spaces. Monograph. P. Noodoff, 1966.