Bol. Acad. C. Fís., Mat. y Nat. Vol. LXVI No. 1-2
Abril, 2006: 9-14

SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

ON THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA

Ignacio L. Iribarren [1]

RESUMEN

Es difícil decir hoy algo nuevo sobre el llamado Teorema Fundamental del Álgebra. El propósito de esta nota es destacar lo que a mi juicio es la diferencia esencial entre el plano complejo y la recta real que hace posible el Teorema Fundamental. La diferencia es de naturaleza topológica y puede ser enunciada y entendida con facilidad: el complemento de un conjunto finito en el plano complejo es un conjunto conexo, en tanto que tal conjunto en la recta real es disconexo. Todos los demás razonamientos utilizados en esta prueba del Teorema Fundamental son válidos en la recta real.

ABSTRACT

Hardly anything new can be said today about the so called Fundamental Theorem of Algebra. The purpose of this note is just to bring forward what seems to me the significant difference between the complex plane and the real line that makes the Fundamental Theorem possible. The difference is topological in nature and can be simply stated and understood: the complement of a finite set in the complex plane is a connected set, whereas such a set in the real line is disconnected. The rest of the arguments employed in this proof of the Fundamental Theorem are also valid in the real field.

Palabras clave: cuerpos, variable compleja, topología.

Keywords: fields, complex variables, topology.

1. Comentarios introductorios

El Teorema Fundamental del Álgebra establece que todo polinomio de coeficientes (reales o) complejos y de grado mayor que cero admite al menos una raíz real o compleja

Es bien sabido que fue Gauss en 1799, a la edad de 22 años, quien demostró por vez primera el Teorema Fundamental del Álgebra, como dió en llamarse y se llama todavía por tradición. Este fue el contenido de su tesis doctoral en la Universidad de Helmstädt. Gauss mantuvo su interés por el teorema durante toda su vida y proporcionó tres pruebas más.

En el curso del siglo XVIII matemáticos de la estatura de d'Alambert, Euler y Lagrange intentaron demostrarlo sin éxito. Un misterio no develado para la época era no sólo la cuestión de la *existencia* de las raices, sino la naturaleza misma de esas posibles raices.

[1]Individuo de Número. Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales.

La obra relativamente reciente [5] es una exposición bastante completa de las demostraciones más conocidas del Teorema Fundamental e incluye numerosas re-ferencias históricas interesantes. El libro presenta doce pruebas, entre ellas la ori-ginal de Gauss. A grandes rasgos éstas pueden clasificarse en tres tipos, según la teoría matemática prevaleciente en su argumentación: topológica, analítica compleja y algebraica. Debe declararse de una vez que no es posible ofrecer una prueba que prescinda por completo de alguna de estas tres ramas, sólo puede disminuirse la dosis de una u otra. Tal es la naturaleza de las cosas y así es preciso aceptarlo. El propio enunciado del teorema nos dice que es imposible ignorar el álgebra; acaso la teoría cuya contribución puede reducirse más es la de variable compleja; pero las consideraciones topológicas son inevitables si nos hacemos cargo que confrontamos una propiedad del plano complejo.

Quizás la prueba más expedita entre las bien conocidas es la que aplica el teorema de Liouville del análisis complejo. Si bien su rigor es inobjetable, nos produce una sensación incómoda. Es como haber recorrido mucho camino para establecer un resultado apreciablemente más básico.

El deseo de proporcionar una demostración enteramente algebraica del Teorema Fundamental es un prejuicio estético ampliamente compartido. Pero eso es pedir demasiado al Álgebra. Empleando técnicas algebraicas sofisticadas (Teoría de Galois principalmente), los ingredientes analíticos y topológicos pueden reducirse a un mínimo; a saber, un polinomio de coeficientes reales y de grado impar admite una raíz real, lo cual exige un argumento de continuidad (topología).

La prueba que presentamos en este trabajo tiene un acento topológico, pero es diferente a todas las expuestas en [5].

Es oportuno agregar que todas las demostraciones conocidas del Teorema Fundamental son de carácter *existencial*. Ninguna de ellas proporciona la menor pista de cómo calcular las raices. Existen, por supuesto, muchos algoritmos eficaces para hacerlo con técnicas de Análisis Numérico, pero no tienen relación con ninguna de las pruebas del teorema.

2. Conectividad en el plano complejo

Las diferencias topológicas entre el plano complejo y la recta real son muchas y profundas. Aquí nos limitamos deliberadamente a establecer la propiedad elemental sobre la cual apoyaremos el Teorema Fundamental.

Puede decirse que el Teorema Fundamental reposa sobre la siguiente proposición, ciertamente falsa en $\mathbb{R}$, y podríamos decir que es debido a eso que el cuerpo real $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado.

Proposición 2.1. *Si B es un conjunto finito en el plano complejo $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} - B$ es conexo.*

Demostración. Tomemos un par de puntos distintos $a, b \in \mathbb{C} - B$. Existe un número infinito de rectas distintas que pasan por a; podemos entonces tomar una l_a que no contiene puntos de B. También existe un número infinito de rectas distintas que pasan por b e intersectan l_a; podemos pues elegir una que no contiene puntos de B, entonces el segmento $[b, c]$, donde $c \in l_a$, está en $\mathbb{C} - B$, igual que el segmento $[a, c]$. En resumen, a y b están unidos *dentro de* $\mathbb{C} - B$ por la poligonal $[a, c, b] = [a, c] \cup [c, b]$. El conjunto $\mathbb{C} - B$ es por tanto conexo (véase [1], §7.2).

$\square$

3. Algunas propiedades de las funciones polinómicas complejas

Como antes, limitamos la atención a los resultados que interesan a nuestros propósitos.

Una función polinómica $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es de la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

para algún entero $n \geq 0$ y constantes complejas a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Suponiendo que $a_n \neq 0$, decimos que f es de *grado* n.

Una función polinómica es desde luego continua en $\mathbb{C}$.

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que, para $n > 0$, existe al menos un $z \in \mathbb{C}$ para el cual $f(z) = 0$. Un tal z se denomina un *cero* o una *raíz* de f.

Sin postular que f tiene alguna raíz, es posible asegurar que no admite más de n. Es un hecho algebraico de fácil demostración. En efecto, el caso $n = 1$ es trivial; supongamos que $n > 1$ y adoptemos la hipótesis inductiva de que todo polinomio de grado $n-1$ no admite más de $n-1$ raices. Si f carece de raices, no hay nada que probar; supongamos que f tiene un cero z_0, aplicamos entonces el algoritmo de división y obtenemos $f(z) = (z - z_0)g(z)$, donde g es un polonomio de grado $n-1$. Pero entonces g no tiene más de $n-1$ raices, luego f tiene a lo sumo n ceros.

El sencillo lema que sigue tiene consecuencias de bastante alcance.

Lema 3.1. *Dada una función polinómica f de grado $n \geq 1$, a cada número real $K > 0$ corresponde algún $k > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > k$, se tiene $|f(z)| > K$.*

Demostración. Procedemos por inducción en n.

Aplicamos la desigualdad

$$|a + b| \geq |a| - |b| \quad \text{para todo} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Para el caso $n = 1$, $f(z) = a_1 z + a_0$, donde $a_1 \neq 0$, tenemos

$$|f(z)| \geq |z||a_1| - |a_0| > K$$

sólo con tomar $|z| > (K + |a_0|)|a_1|^{-1}$.

Supongamos ahora que el lema es cierto para todo polinomio de grado $n-1$ (donde $n > 1$).

Tomando f como en (1), obtenemos

$$|f(z)| \geq |z||g(z)| - |a_0|$$

donde $g(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$ es de grado $n-1$. Dado $K > 0$, la hipótesis inductiva implica que existe un $k > 0$ tal que $|g(z)| > K + |a_0|$ para $|z| > k$, y podemos suponer que $k > 1$. En consecuencia,

$$|f(z)| > k(K + |a_0|) - |a_0| > K$$

□

Corolario 3.1. *Si f es una función polinómica y A es un conjunto acotado en el plano complejo, entonces $f^{-1}(A)$ es acotado.*

Demostración. Como A es acotado, debe existir un $K > 0$ tal que $|w| < K$ para todo $w \in A$. Pero, según el lema, $|f(z)| > K$ para todo $|z| > k$, para algún $k > 0$. Ahora bien, si $f^{-1}(A)$ no fuese acotado, existiría un $z \in f^{-1}(A)$ con $|z| > k$, luego $f(z) \in A$ y $|f(z)| > K$ que es una contradicción.

□

Corolario 3.2. *Si f es una función polinómica y A es un conjunto compacto en el plano complejo, entonces $f^{-1}(A)$ es compacto.*

Demostración. A es cerrado y acotado. Como f es continua, $f^{-1}(A)$ es cerrado y, en virtud del corolario anterior, también es acotado y por tanto compacto.

□

Comentario 3.1. *Una función con la propiedad atribuida en el Corolario 3.2 suele llamarse una función propia en Topología ([4], Chapter I, §10). El corolario establece que una función polinómica es propia. El hecho de que $\mathbb{C}$ es un espacio localmente compacto (entre muchos otros atributos) da paso a este próximo resultado que interesa a nuestros propósitos. En lenguaje topológico, dice que una función polinómica es cerrada.*

Corolario 3.3. *Si f es una función polinómica y K es un conjunto cerrado en el plano complejo, entonces $f(K)$ es cerrado. En particular, el rango $f(\mathbb{C})$ de f es cerrado.*

Demostración. Consideremos la clausura $\overline{f(K)}$ y tomemos cualquier punto $w \in \overline{f(K)}$. Debemos probar que $w \in f(K)$, vale decir, que existe un $z \in K$ tal que $f(z) = w$.

Ya que w está en la clausura de $f(K)$, existe una sucesión $\{f(z_n)\}$ en $f(K)$ (de modo que todo $z_n \in K$) tal que $\lim f(z_n) = w$.

Ahora, como $\{f(z_n)\}$ es convergente, el conjunto de sus términos es acotado, se infiere pues que está contenido en un conjunto compacto A. Por el Corolario 3.2, $f^{-1}(A)$ es compacto lo mismo que $K \cap f^{-1}(A)$, y este último contiene la sucesión $\{z_n\}$. De acuerdo con una conocida propiedad de los conjuntos compactos (véase [1]), existe una sucesión parcial $\{z'_n\}$ de $\{z_n\}$ que converge a un punto $z \in K \cap f^{-1}(A)$. Pero entonces, en virtud de la continuidad de f, se tiene que $\lim f(z'_n) = f(z)$; por otro lado, $\{f(z'_n)\}$ es una sucesión parcial de $\{f(z_n)\}$, de modo que también $\lim f(z'_n) = w$. En síntesis, $f(z) = w$ y sabemos que $z \in K$.

□

4. El Teorema Fundamental

Ahora estamos en condiciones de abordar el Teorema Fundamental.

Dada una función polinómica f como en (1) ($n > 0$), demostramos que tiene al menos una raíz probando que su rango $f(\mathbb{C})$ es igual a $\mathbb{C}$.

Primero, sea G el conjunto de los *puntos críticos* de f, es decir

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid f'(z) = 0\}$$

donde f' es, desde luego, la derivada de f.

Nótese que f' es un polinomio de grado $n-1$, de modo que el conjunto G de sus raices contiene no más de $n-1$ elementos. Esto implica que el conjunto $H = f(G)$ es también finito con no más de $n-1$ puntos.

Sea $b = f(z_1) \in H$, donde $z_1 \in G$. Los puntos que constituyen el conjunto

$$f^{-1}(b) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = b\} \subset f^{-1}(H)$$

son las raices del polinomio $f(z) - b = 0$ de grado n; de modo que $f^{-1}(b)$ es un conjunto finito de no más de n puntos (uno de ellos es z_1). Y como H tiene a lo sumo $n-1$ puntos, entonces el conjunto $f^{-1}(H)$ es finito con no más de $n(n-1)$ elementos. Lo que interesa de esto último es cerciorarnos de que $f^{-1}(H) \neq \mathbb{C}$.

Consideremos los conjuntos

$$E = \mathbb{C} - f^{-1}(H) \quad \text{y} \quad F = \mathbb{C} - H$$

Nos proponemos demostrar que $f(E) = F$.

Obsérvese que, según la Proposición 2.1. F es un conjunto conexo. Este hecho es precisamente el punto crucial de la prueba.

Nótese que si $z \in E$, entonces $f(z) \notin H$, vale decir $f(z) \in F$ y, como obviamente $f(z) \in f(\mathbb{C})$, se tiene

$$f(E) \subset F \cap f(\mathbb{C}); \tag{2}$$

por otro lado, si tomamos $f(z) \in F \cap f(\mathbb{C})$, entonces $f(z) \in F$, o sea $f(z) \notin H$, por tanto $z \notin f^{-1}(H)$, de donde $z \in E$ y $f(z) \in f(E)$.

Tenemos pues

$$F \cap f(\mathbb{C}) \subset f(E)$$

que, junto a (2), hace

$$f(E) = F \cap f(\mathbb{C}). \tag{3}$$

Como $f(\mathbb{C})$ es cerrado (Corolario 3.3), se infiere que $f(E)$ *es cerrado en* F.

Tomemos ahora cualquier $z_0 \in E$; entonces $z_0 \notin f^{-1}(H)$, o sea $f(z_0) \notin H$, que quiere decir (ya que $H = f(G)$) $z_0 \notin G$. Así pues, z_0 no es punto crítico de f: $f'(z_0) \neq 0$.

Si se prefiere, podemos considrerar f como $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, y el hecho de que $f'(z_0) \neq 0$ significa que el diferencial $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal no-singular. Invocando el Teorema de la Función Inversa (véase [2], §6.1): Existe un entorno abierto S de z_0 y un entorno abierto T de $f(z_0)$, tales que $f : S \mapsto T$ es un *difeomorfismo* [2].

Esto implica que, para todo $z \in S$, $f'(z) \neq 0$; luego, $z \notin G$, de modo que $f(z) \notin H$, por tanto $z \notin f^{-1}(H)$, esto es $z \in E$ y $f(z) \in f(E)$. Hemos probado que $f(S) \subset f(E)$, pero entonces $f(S) = T$ es un entorno abierto de $f(z_0)$ *contenido* en $f(E)$. Esto prueba que $f(E)$ es un conjunto abierto, por tanto abierto en F (siendo un subconjunto de F, de acuerdo con (3)).

[2] $f : S \mapsto T$ es un homeomorfismo diferenciable y $f^{-1} : T \mapsto S$ es diferenciable también.

En suma, $f(E)$ es un subconjunto de F que es *abierto y cerrado* en F. Como F es conexo (Proposición 2.1) y sabemos que $f(E)$ no es vacío (pues E no lo es), arribamos a la conclusión [3]

$$f(E) = F$$

Pero esto significa que

$$\mathbb{C} - H = F = f(E) \quad \text{y} \quad H = f(G) \quad \text{son ambos subconjuntos de } f(\mathbb{C}),$$

luego $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

LITERATURA CITADA

[1] IRIBARREN, I.L.
1973 *Topología de Espacios Métricos*
Limusa-Wiley, Mexico

[2] IRIBARREN, I.L.
1980 *Cálculo Diferencial en Espacios Normados*
Equinoccio (USB), Caracas

[3] MOISE, E.E.
1977 *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*
Springer, N.Y.

[4] BOURBAKI, N.
1966 *Elements of Mathematics: General Topology, Part I*
Hermann - Addison-Wesley

[5] FINE, B. & ROSENBERGER, G.
1997 *The Fundamental Theorem of Algebra*
Springer, N.Y.

[3]Nótese que no es preciso suponer que G (ni por tanto H ni $f^{-1}(H)$) es vacío o no; esto no altera ninguno de los razonamientos.